REVISTA DE METALURGIA, 42 (3)
MAYO-JUNIO, 185-202, 2006
ISSN: 0034-8570

Modelación matemática del mezclado en ollas (cucharas) de aluminio equipadas con la técnica de desgasificación rotor-inyector*

M.A. Ramírez-Argáez**, F. Contreras*** y C. González**

Resumen

Se desarrolló un modelo matemático Euleriano para analizar el flujo de fluidos y el mezclado en ollas (cucharas) de tratamiento de aluminio equipadas con rotor-inyector, variando parámetros del proceso como la velocidad de giro del rotor, la distancia de inmersión de la flecha, el flujo de gas, el tipo de rotor y el factor de forma de la olla (cuchara) (relación altura/diámetro). El modelo matemático simula la operación, con y sin inyección de gas, a través del rotor, empleando el código comercial PHOENICS donde se resolvieron las ecuaciones de continuidad, momento, especies químicas y turbulencia, k-ε, de forma simultánea, tanto para la fase líquida como para la gaseosa. El dominio se dibujó, realistamente, empleando coordenadas ajustadas al cuerpo (BFC) y se utilizó el algoritmo IPSA *(Interphase Slip Algorithm)* para simular el comportamiento del gas inmerso en el líquido, así como la superficie libre del baño. De los resultados que arrojó el modelo se concluyó que el grado de recirculación del baño depende, principalmente, de la velocidad de giro de rotor y que, ésta, aumenta al aumentar el giro del rotor. También, se dedujo que la principal causa de formación y tamaño del vórtice es la velocidad angular del rotor. Por último, el mezclado se mejora cuando: 1) La colocación del rotor se sitúa a una profundidad de inmersión de 0,229 m; 2) Usando altas velocidades de rotación; 3) Si se usan ollas (cucharas) con relaciones geométricas de baja altura y diámetro grande; y 4) Usando rotores muescados.

Palabras clave Modelación matemática. Flujos bifásicos. Vórtice. Superficie libre. Mezclado.

Mathematical modeling of mixing phenomena in ladles of aluminum equipped with impeller and gas purging for degassing

Abstract

In this work a fundamental Eulerian mathematical model was developed to study fluid flow and mixing phenomena in aluminum ladles equipped with impeller for deshidrogenization treatment. The effect of critical process parameters such as rotor speed, depth of immersion, gas flow rate, and type of rotor on the mixing behavior and vortex formation was analyzed with this model. The model simulates operation with and without gas injection and it was developed on the commercial CFD code PHOENICS 3.4 in order to solve all conservation equations governing the process, i.e. continuity, 3D turbulent Navier-Stokes and the k-ε turbulence model for a two-phase fluid flow problem using the Inter Phase Slip Algorithm (IPSA). In order to realistically represent the process, shape of the furnace and three kinds of impellers were drawn by employing Body Fitted Coordinates (BFC). From the results it

* Trabajo recibido el día 16 de agosto de 2005 y aceptado en su forma final el día 28 de marzo de 2006.
** Profesor, Departamento de Ingeniería Metalúrgica de la Facultad de Química de la UNAM, Dirección: Fac. de Química, Edificio "D", Circuito de los Institutos s/n, Cd. Universitaria, C.P. 04510, México, D.F., México.
*** Estudiante de Posgrado en Metalurgia, Centro de Graduados, Instituto Tecnológico de Morelia, Dirección: Avenida tecnológico No. 1500, Col. Lomas de Santiaguito, C.P. 58120, Morelia, Michoacán. México.

was concluded that mixing behavior is highly dependent on the rotor speed and on the rotor type. Mixing time is improved when: 1) Impeller is located at a depth of 0.229m into the aluminum bath, 2) By using high rotor speeds, 3) By using ladles with a high aspect ratio of Diameter to Height, and 4)By using an impeller with notches.

Keywords Mathematical modeling. Two phase flows. Vortex. Free surface. Mixing.

1. INTRODUCCIÓN

La obtención de productos de aluminio vía fundición se lleva a cabo a partir de cuatro etapas básicas: 1) Fusión del aluminio, generalmente en hornos de inducción o reverbero, utilizando chatarra o lingotes de aluminio como materia prima; 2) Refinación o eliminación de hidrógeno y otras impurezas mediante un tratamiento como inyección de gases inertes, vacío u otro; 3) Colada y solidificación de la pieza de aluminio de forma controlada; y 4) Maquinado y acabado superficial de las piezas. La segunda y tercera etapas son determinantes en la calidad del producto, ya que en la etapa de refinación es posible eliminar impurezas y gases mientras que en la tercera etapa se pueden optimizar la velocidad y dirección de la solidificación para controlar porosidad y manipular las velocidades de enfriamiento y, con esto, obtener la calidad metalúrgica deseada.

El hidrógeno es el gas que influye de forma más negativa en las propiedades físicas y mecánicas de las piezas fabricadas a base de aluminio, por la porosidad que este produce. Las inclusiones no metálicas también afectan de forma muy perjudicial al aluminio en su estado sólido, al disminuir sus propiedades mecánicas. La necesidad que se tiene para eliminar tanto al hidrógeno como a las inclusiones no metálicas del baño de aluminio líquido es muy clara y justificada cuando la pieza a producir requiere de altas especificaciones de calidad, como es el caso de piezas automotrices o aeronáuticas, las cuales deben satisfacer altísimos estándares y normas de calidad en cuanto a propiedades mecánicas, acabado superficial, etc.[1 y 2]. El uso de gases inyectados mediante un rotor-inyector es una de las opciones más ampliamente empleadas a nivel industrial con el fin de refinar al aluminio, eliminando las inclusiones no metálicas y removiendo los gases disueltos que son nocivos para la calidad del producto solidificado.

En cuanto a la eliminación de gases disueltos mediante la inyección de gases inertes en el baño metálico, los estudios científicos más frecuentemente encontrados en la literatura se basan en el desarrollo de un balance global de masa para el hidrógeno, incluyendo la cinética de desgasificación por medio de coeficientes globales de transporte de masa, cuyo resultado es la obtención de una ecuación diferencial ordinaria que representa la variación del contenido de hidrógeno con el tiempo [3 y 4].

Gracias a la opacidad y a las condiciones adversas de temperatura del aluminio líquido, la modelación física se ha popularizado en la tarea de analizar procesos de refinación de metales. Se han construido modelos físicos del proceso rotor-inyector, utilizando agua y aire para representar aluminio y argón, basados en los criterios de similitud geométrica, dinámica y cinemática, aunque este último criterio se ha afirmado como imposible de satisfacer por las diferencias en las viscosidades cinemáticas entre aluminio y el agua[5]. Se han estudiado aspectos tales como el desempeño de distintos tipos de rotores [6-8], mezclado[9], tamaño de burbujas[10] y formación del vórtice[8], entre otros temas de interés

Maniruzzaman y Makhlouf[11 y 12] hicieron modelos matemáticos bifásicos (usando la técnica numérica *Volume Of Fluid*, VOF, para describir la superficie libre con el código FLUENT v4.4) de ollas (cucharas) equipadas con rotor-inyector para predecir, dentro de ellas, el patrón de flujo, la distribución de las burbujas, trayectorias de inclusiones y turbulencia, para casos de ollas (cucharas) con rotores convencionales o equipos REVROT (*Reverse Rotation*; rotación en reversa). Sin embargo, se debe señalar que los patrones de flujo no parecen coincidir con los hallazgos experimentales. Dong *et al*.[13], desarrollaron un modelo de cómputo, utilizando el código FLUENT v2.97 que predice las características de flujo en 3D en la olla (cuchara), utilizando el modelo de turbulencia k-Â y resolviendo las ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad. El modelo trata a la propela como una placa estacionaria en un tanque rotatorio. El modelo sirvió para corroborar las mediciones de velocidades y energía turbulenta que habían sido realizadas en forma experimental en un modelo físico. Lane *et al*.[14], desarrollaron un modelo de cómputo con simulación de CFD para predecir el mezclado gas-líquido en un tanque con rotor-inyector equipado con un separador (*baffle*). El cálculo se realizó en 3D y variaron los tamaños de las burbujas lo que involucraba la coalescencia y rompimiento de éstas. La zona del rotor se resolvió utilizando un método de Esquemas Múltiples de Referencia. Las fases gas y líquido se consideraron en un marco Euleriano y se planteó la turbulencia mediante el modelo *k-Â*. Obtuvieron patrones de

velocidad de líquido, distribución de gas, tamaño de burbuja, entre otros, los cuales fueron muy acertados con las mediciones experimentales.

Hay que remarcar que los modelos matemáticos que describen el funcionamiento del rotor-inyector en base a principios de conservación, son contados. En este trabajo, se modeló el flujo de fluidos y el mezclado en ollas (cucharas) de refinación de aluminio que emplean la técnica de rotor-inyector y, muy en particular, el movimiento rotacional que adquiere el baño por efecto del giro del rotor así como la inyección de burbujas a través del mismo. Con esto, es posible comprender, a partir de principios fundamentales de fenómenos de transporte, la forma en que la agitación y el grado de turbulencia afectan la rapidez de mezclado en el baño, así como la forma en que algunos parámetros del proceso, como la velocidad angular del rotor, el flujo de gas, la distancia de inmersión de la flecha, el factor de forma de la olla (cuchara) y el tipo de rotor, contribuyen al proceso. Con base en este modelo, es posible proponer mejores condiciones de operación para obtener tiempos de mezclado reducidos en el baño, en función de estos parámetros, ya que un mejor mezclado está asociado a una mayor velocidad de remoción de gases disueltos. El realismo que se pretende lograr es, sin duda, la mayor aportación de este trabajo, al incorporar la formación del vórtice y dibujar el reactor de manera realista, lo cual no se ha hecho hasta ahora.

2. MODELACIÓN MATEMÁTICA

La olla (cuchara) de tratamiento de aluminio, equipada con rotor-inyector (de múltiples diseños) introduce el gas de tratamiento en el metal a través de un rotor, el cual gira muy rápidamente (200 a 600 rpm), rompiendo el chorro de gas para formar burbujas muy finas (3-6 mm de diámetro) y dispersarlas por todo el líquido. La velocidad de agitación genera un vórtice en la superficie libre del metal. La velocidad de rotación y el flujo de gas se pueden variar dependiendo de las dimensiones del baño. La figura 1 muestra una ilustración de las partes esenciales de este equipo de tratamiento de aluminio. El uso de este sistema permite obtener concentraciones de hidrógeno de hasta 0,05 ml/100 g de Al (0,12 wt % H). Cabe mencionar que el uso de un rotor-inyector en la etapa de refinación de aluminio tiene como objetivo principal disminuir los niveles de hidrógeno en el metal líquido, generar una buena agitación para promover un buen mezclado y, con esto, homogeneizar en tiempos cortos la concentración de los elementos aleantes en el baño y finalmente y, en menor grado, eliminar inclusiones no metálicas.

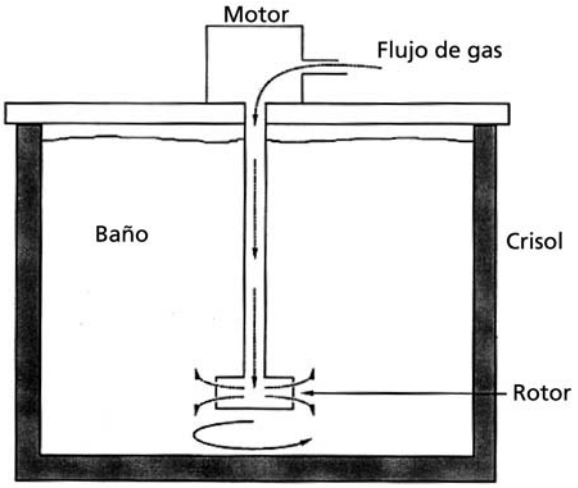

Figura. 1. Olla (cuchara) equipada con rotor inyector.

Figure. 1. Ladle equipped with impeller and gas purging for degassing.

Las variables de proceso más importantes son: velocidad de giro del rotor, flujo de gas, altura de la flecha, factor de forma de la olla (cuchara), tipo de rotor y tamaño de burbuja.

Para determinar los tiempos de mezclado, en este trabajo, se siguió el principio que utilizó Mietz y Oeters[15], es decir, el tiempo de mezclado se definió como el tiempo en el cual el trazador alcanza una concentración de equilibrio con una tolerancia de $\pm$1% en todos los puntos del baño.

2.1. Generalidades y suposiciones

Se desarrolló un modelo matemático bifásico Euleriano-Euleriano, basado en las ecuaciones fundamentales de conservación de masa y del momento de la cantidad de movimiento que gobiernan el flujo de fluidos y el transporte de masa en la olla (cuchara) de refinación de aluminio. El modelo desarrollado, aluminio-argón, pretende representar, de manera realista, las condiciones de operación encontradas en ollas (cucharas) de tratamiento de aluminio industriales, para lo cual se resolvieron las ecuaciones de continuidad, las ecuaciones turbulentas de Navier-Stokes, junto con el modelo de turbulencia κ-ε[16-18], para simular y predecir los patrones de flujo dentro de la olla (cuchara). Además, se resolvió la ecuación de conservación de especies químicas para simular el mezclado de solutos en el baño. La geometría de la olla (cuchara) si pudo ser diseñada apropiadamente, así como la formación del vórtice, lo cual permite afirmar que este modelo es el estado del arte en este proceso. Dada la importancia del diseño

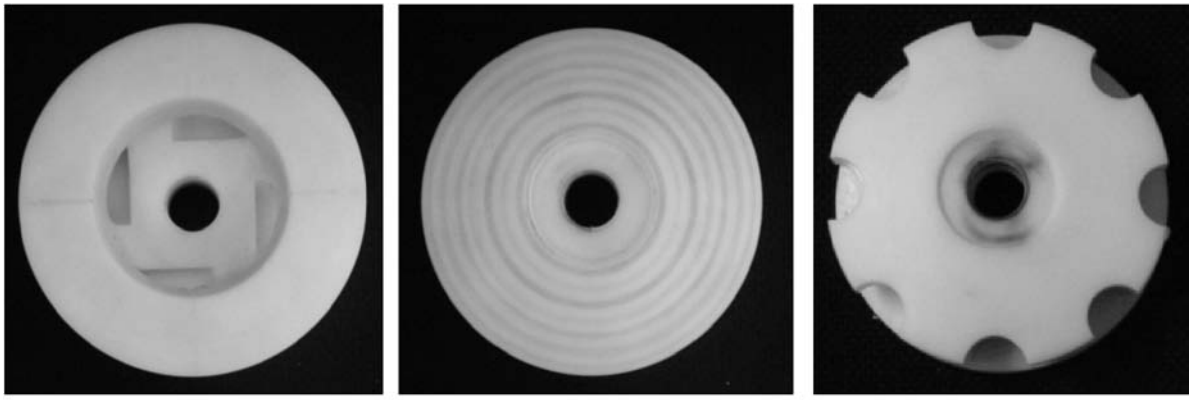

Figura. 2. Tipos de rotores simulados en esta tesis: a) rotor estándar, b) rotor liso y c) rotor muescado.

Figure. 2. Types of impellers simulated in this work: a)standard impeller, b) smooth impeller, and c) impeller notched.

del rotor se probaron 3 distintas configuraciones industriales, mostradas en la figura 2.

Las siguientes suposiciones se plantean con el fin de simplificar el problema y facilitar su solución: 1) Propiedades físicas constantes; 2) Representación de burbujas por esferas rígidas de tamaño constante en todo el volumen de control (diámetro de burbuja de 5 mm). No se consideran cambios de tamaño en la burbuja por cambios de presión metalostática, coalescencia o desintegración de burbujas; 3) Baño isotérmico; 4) Turbulencia representada por el modelo k-ε en 3-D. El modelo es aplicado, únicamente, a la fase líquida; 5) Sistema de coordenadas ajustadas al cuerpo (BFC) de PHOENICS para adaptar la geometría de la olla (cuchara) a su forma real; 6) Se usa un coeficiente interfacial de fricción, para describir la fuerza de arrastre que ejerce el gas sobre el líquido.

2.2. Ecuaciones gobernantes

Las ecuaciones de transporte que gobiernan la fluidinámica y el transporte de masa en la olla (cuchara) de desgasificado y que, por lo tanto, son necesarias para resolver el problema, basadas en una aproximación Euleriana-Euleriana para flujos bifásicos usando el algoritmo IPSA (*Interpenetrating Slip Algorithm*) [16] son: a) Ecuación de continuidad para cada fase (gas y líquido), donde aparece un término poco común en la representación de la ecuación de continuidad pero que, en flujos multifásicos, es un término indispensable mediante el cual se explica la dispersión de las burbujas de gas desde la entrada hasta la superficie libre, en ollas (cucharas) agitadas con gas. Se debe de tomar en cuenta que en cualquier lugar del baño se cumple que la suma de fracciones volumétricas de ambas fases sea igual a la unidad; b) Ecuación de conservación del momento de la cantidad de movimiento para ambas fases (gas y líquido), la cual está compuesta por el término transitorio, el término de transporte de momento convectivo, seguido del término de transporte de momento difusivo (el cual toma en cuenta los esfuerzos turbulentos de Reynolds, tratados mediante la aproximación de Bussinesq[17] y la viscosidad turbulenta se calcula con el modelo estándar k-ε), las fuerzas de flotación de los cuerpos (de flotación/empuje), el gradiente de presión y las fuerzas de fricción o el intercambio del momento de la cantidad de movimiento entre las fases presentes. Este último término, es de vital importancia ya que el arrastre que ejerce el gas sobre el líquido promueve, en gran medida, la agitación del baño. Este término tiene la misma magnitud para la fase gas y para la fase líquida, pero signo opuesto. Existe un término que representa la fuerza de flotación/empuje, la cual promueve el ascenso de las burbujas de gas debido a que esta fase es menos densa que el líquido; c) Ecuaciones de Conservación asociadas al modelo de turbulencia k-ε (sólo para la fase líquida, propuesto por Launder y Spalding[18]); Ecuación de Conservación de especies químicas, para determinar el mezclado en el baño de aluminio al inyectar un trazador cuando ya se tiene un patrón de flujo y estructura turbulenta definidos, en estado estable. La cantidad de soluto inyectado es dividida entre el volumen total del baño, obteniendo así la concentración promedio o de equilibrio, con la cual se podrá determinar el tiempo total de mezclado. El transporte de soluto dentro del baño se obtiene al resolver la ecuación de conservación de especies químicas que incluye un término transitorio, un término de dispersión convectiva de soluto y un término de dispersión difusiva y turbulenta de soluto. En este caso, el

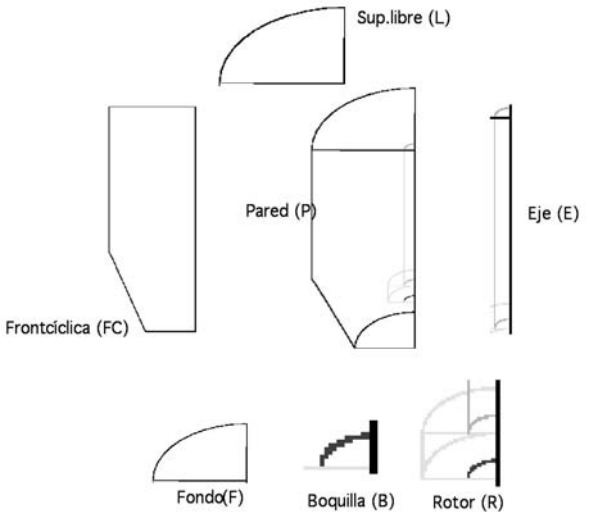

Figura. 3. Olla (cuchara) equipada con rotor inyector dividido en regiones.

Figure. 3. Ladle equipped with impeller divided in regions.

mezclado sólo se presenta en la fase líquida al no considerar, en este estudio, transferencia de masa desde el líquido hacia las burbujas de gas. Una descripción más detallada del modelo incluyendo las ecuaciones y las condiciones de frontera se encuentra en la bibliografía[19].

2.3. Condiciones de frontera

La figura 3 muestra un esquema de las distintas fronteras de una olla (cuchara) equipado con rotor-inyector en coordenadas ajustadas al cuerpo (BFC) en 3D, tal como se implementaron en la simulación. En esta figura, la región L representa la superficie libre, que en este cálculo es aire, ya que la intercara líquido-atmósfera esta dentro del dominio de cómputo; la región P representa la pared; la región F representa el fondo del cilindro; la región R representa al rotor; la región E representa al eje; la región B representa a la boquilla (el rotor real usado cuenta con cuatro boquillas) y; finalmente, la región FC representa las condiciones de frontera cíclicas que significan que las componentes angulares tendrán los mismos valores en cualquier posición tangencial. Debido a que el rotor cuenta con cuatro boquillas posicionadas de forma equidistante, fue posible tomar solo una cuarta parte como dominio para llevar a cabo la simulación y, con esto, se consiguió minimizar los tiempos de cálculo. Es importante mencionar que no significa que existan ejes de simetría en forma axial. De hecho, no existe eje de simetría alguno, sólo que el uso de condiciones de frontera cíclicas y la distribución de boquillas en el rotor permitieron dividir el dominio de esta forma. En las paredes se tienen condiciones de no deslizamiento y cero turbulencia, mientras que en la superficie libre, no hay corte viscoso ya que se encuentra una capa de aire gaseoso y el gas inyectado al baño escapa a la atmósfera. Por último, en las boquillas, el gas entra por debajo de éstas, a una cierta velocidad axial y tangencial, tal como sucede en el proceso real.

Tabla I. Propiedades físicas del aluminio y del argón

Table I. Physical propiedades of aluminum and argon

Propiedad	Fluido de Operación (Al)	Gas inyectado (Ar)
Viscosidad, μ, (kg/m·s)	0,129	2,0E-5
Densidad, ρ, (kg/m^3)	2.380	1,18
Viscosidad Cinemática, υ, (m^2/s)	5,46E-5	1,69E-5

Tabla II. Dimensiones de la olla (cuchara) y del rotor industrial

Table II. Dimensions of the pot (spoon) and the industrial rotor

	Equipo Original
Diámetro superior de la olla (cuchara) (m)	0,69
Diámetro inferior de la olla (cuchara) (m)	0,40
Altura total de la olla (cuchara) (m)	0,98
Altura del cono truncado de la olla (cuchara) (m)	0,35
Diámetro del rotor (m)	0,18
Altura del rotor (m)	0,08
Diámetro de la boquilla (m)	9E-3
Diámetro de la burbuja (m)	5E-3
Velocidad media del rotor (rpm)	400
Flujo medio de Desgasificante (l/min)	4

2.4. Propiedades termofísicas

Los valores de las propiedades físicas y de transporte del aluminio y del argón se muestran en la tabla I, mientras que las dimensiones de la olla (cuchara) simulada se presentan en la tabla II.

3. SOLUCIÓN

El sistema de ecuaciones diferenciales parciales que describe la operación de estos reactores, sujetas a sus respectivas condiciones de frontera, no tiene solución analítica, de tal forma que se deben resol-

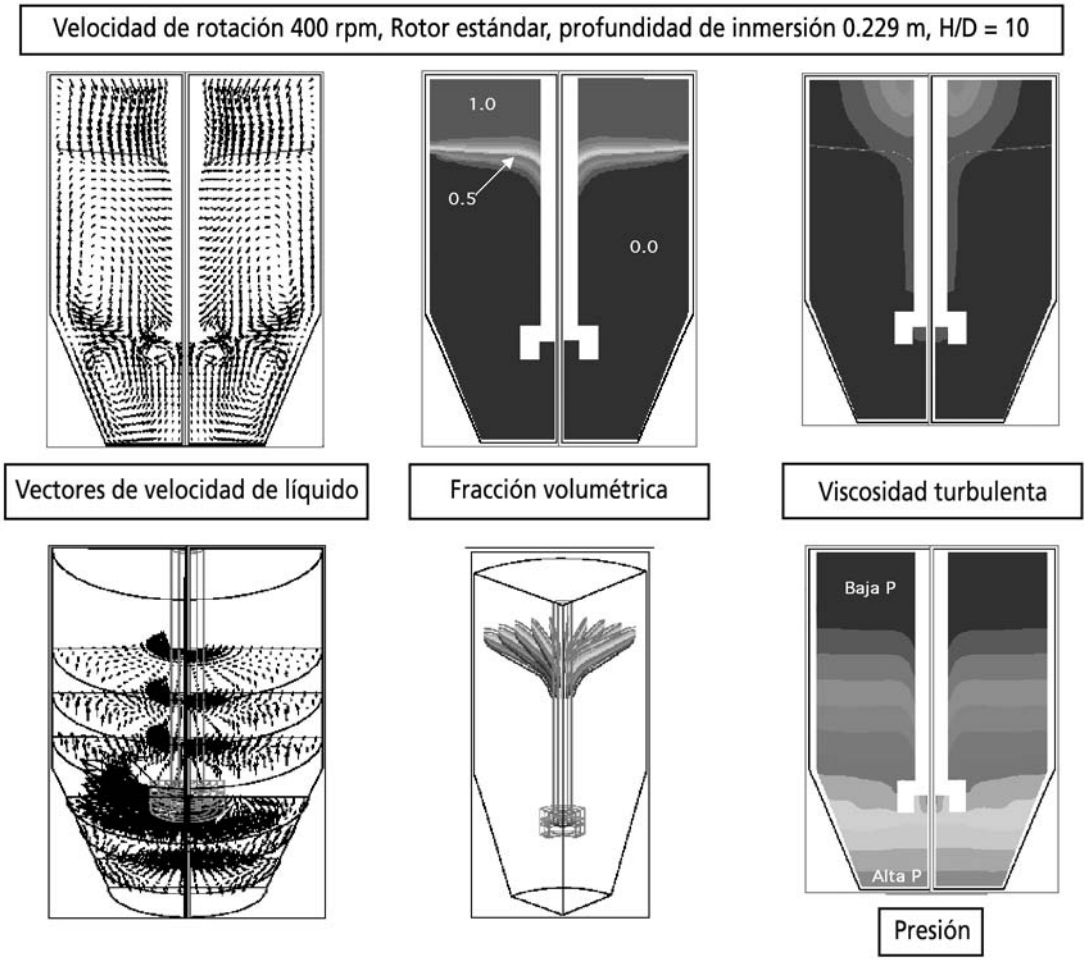

Figura. 4. Resultados de la simulación del proceso sin inyección de gas, bajo condiciones estándar de operación (Velocidad de rotación 400rpm, rotor estándar, 0.229m de inmersión del rotor, relación altura a diámetro (H/D) unitaria). a) Patrones de flujo, b) contornos de fracción de gas, c) contornos de viscosidad cinemática turbulenta y presión.

Figure. 4. Results of simulation of the process without gas purging, under standard operating conditions (rotating speed 400 rpm, standard impeller, impeller immersion depth of 0.229 m, aspect ratio, H/D=1. a) Flow patterns, b) Gas fraction contours, c) kinematic turbulent viscosity and pressure contours.

ver, simultáneamente y de manera numérica, utilizando para ello el código comercial de flujo de fluidos computacional (CFD) PHOENICS versión 3.4. Este código, consiste en resolver las ecuaciones gobernantes mediante la técnica del volumen de control, en la cual el dominio se discretiza en elementos de volumen conocidos como nodos. En cada elemento o nodo, se integra cada una de las ecuaciones gobernantes. Como resultado de dicha integración se transforma el sistema de ecuaciones gobernantes en sistemas de ecuaciones algebraicas que se resuelven numéricamente a través de técnicas iterativas. Para correr las simulaciones se utilizó un PC, con un procesador Pentium IV ®, 512 MB RAM, con una velocidad de reloj de 2GHz y cada simulación tardó, aproximadamente, 5 horas de cómputo.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Resultados del modelo sin inyección de gas

El proceso de agitación de la olla (cuchara) sin inyección de gas ocurre en la primera etapa del tratamiento de desgasificado y, cuando el baño alcanza una condición estacionaria, se inicia la inyección del gas a través del eje del rotor. En la figura 4 se aprecian los resultados, en forma gráfica, de los patrones de flujo, forma del vórtice, estructura turbulenta y campo de presiones en el líquido para condiciones de operación estándar (rotor estándar, figura 2; 400 rpm; H/D=1,0; y 0,229 m de inmersión de flecha) sin inyección de gas.

Los patrones de flujo mostrados en la parte superior muestran un plano rz de la olla (cuchara), don-

de se pueden ver con claridad los ojos de recirculación generados por efecto de la velocidad de giro de rotor por encima y por debajo del rotor. La línea representa la superficie libre del líquido en la olla (cuchara) y muestra muy claramente la formación de un vórtice que se hace más pronunciado conforme incrementan las velocidades de giro del rotor. El giro del rotor provoca la formación del vórtice, ya que las fuerzas centrífugas asociadas a la rotación que actúan en dirección r se balancean con las fuerzas de presión en r, mientras que, en z, el peso de fluido se balancea con la presión provocada por la columna de fluido. Entonces, el vórtice describe la forma de la superficie libre, la cual tiene como característica que ahí se presenta la misma presión que la atmosférica. La presión del fluido y, por ende, la forma del vórtice dependen de las presiones radiales y axiales (provocadas por la fuerza de gravedad y la fuerza centrífuga). La fuerza centrífuga es, en los hechos la que determina, la forma del vórtice, pues el peso de fluido es el mismo al tener siempre el mismo nivel de metal, es decir, a mayor velocidad de rotación mayores son las fuerzas centrífugas y, consecuentemente, mayores serán las presiones en dirección r y, finalmente, más pronunciado será el vórtice formado. De acuerdo a los trabajos consultados en la revisión bibliográfica, la formación del vórtice es algo indeseable en el proceso[20]. Es importante señalar que los vectores representados corresponden a las velocidades del líquido por lo que, los vectores por encima de la superficie libre carecen de sentido físico pues en esa zona existe 100% gas. Los vectores de la gráfica de la parte inferior de la figura 4 muestran perfiles de velocidad en 3D, de tal forma que también se puede observar la componente angular del movimiento que provoca el giro del rotor, debido a que el líquido adyacente al rotor y al eje adquiere la velocidad de éstos últimos por el transporte de momento que existe entre el rotor y el fluido. Es muy notorio el movimiento tridimensional del líquido en la olla (cuchara), al observarse vectores con una componente tangencial, radial y axial muy marcada en ciertas zonas del baño, lo que explica el motivo por el cual no fue posible utilizar ejes de simetría durante la simulación y, de ahí, que anteriores intentos por representar el sistema en 2D sean inútiles al estar sumamente sobresimplificados. En relación a la componente radial, esta se debe a que se crea una caída de presión en la parte inferior de los rotores, la cual actúa como bomba succionando fluido por debajo del rotor y expulsándolo, a alta velocidad, en dirección radial, a través de los orificios laterales del rotor.

Las gráficas superiores muestran los contornos de fracción de gas, mientras que las gráficas inferiores muestran isolíneas de la fracción de gas. En la zona de la superficie libre se puede observar una franja de contornos (en vez de una línea definida), la cual se debe a errores numéricos en la simulación, asociados a los esquemas de convección utilizados en la formulación del "volumen de control" y que se conocen como "difusión numérica" o "difusión falsa" y se presentan, con mucha frecuencia, cuando se simulan superficies libres[16].

El mezclado del baño está directamente ligado al campo de viscosidad cinemática turbulenta por lo que, en la figura 4, puede observarse con claridad el grado de agitación del baño, siendo éste mayor en la zona adyacente al eje y rotor, lo cual es muy lógico ya que la energía mecánica que propicia la agitación dentro de la olla (cuchara) la suministran el eje y rotor, de tal forma que el líquido más próximo a ellos la absorbe y, esa energía mecánica, se transforma en energía cinética turbulenta, la cual actuará como energía de mezclado. Se debe señalar que la zona de alta turbulencia en la parte superior del reactor no tiene significado físico pues se trata de zona ocupada por gas (fracción de líquido tiende a cero), por lo que siendo la turbulencia considerada solo al líquido se deben despreciar esas zonas de alta turbulencia en el gas para el propósito de los prsentes análisis.

Los contornos de presión son responsables del movimiento del líquido en la olla (cuchara) ya que se crean zonas adyacentes a la flecha y al rotor de baja presión, lo cual promueve la formación del vórtice y, además, genera el patrón de flujo recirculante. Se puede observar también que, justo debajo del rotor, se crea una caída pronunciada de presión, por lo que ese rotor actúa como una bomba, absorbiendo fluido adyacente por debajo de él y enviándolo o expulsándolo hacia fuera, con componentes angulares y radiales a través de sus ranuras laterales. Se ve que, a bajas velocidades de giro del rotor, el baño se encuentra más estancado, es decir, se distorsiona menos el campo de presión metalostática (Fig. 4).

4.2. Resultados del modelo con inyección de gas

El periodo de inyección de gas resulta ser el más importante del proceso debido a que, en esta etapa, se pretende que el baño se encuentre lo suficientemente agitado para que todo el líquido logre estar en contacto con el gas introducido ya que, entonces, se podrá llevar a cabo la refinación. Algunas aleaciones y otras adiciones al baño ocurren también en esta etapa y requieren que la composición de estas se homogenice rápidamente para ser mejor aprovechadas y minimizar los tiempos de tratamiento. Además, el intercambio de masa entre el metal y las

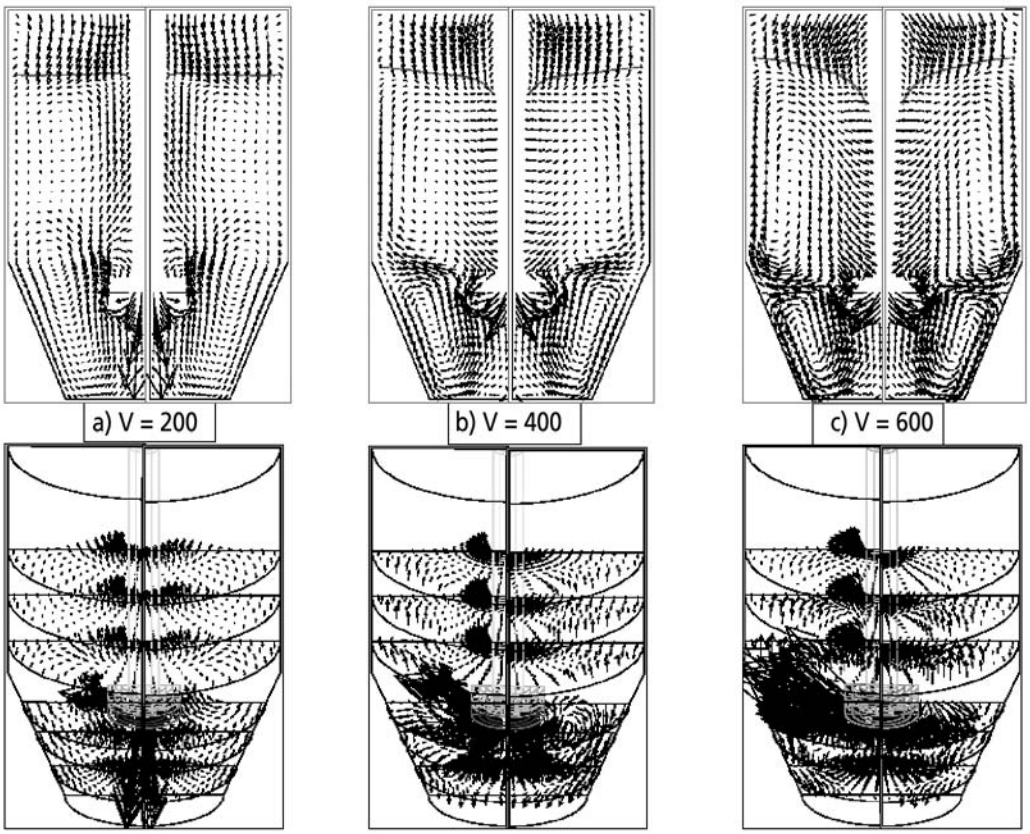

Figura. 5. Perfiles de velocidad variando la velocidad de giro del rotor con inyección de gas.

Figure. 5. Velocity profiles calculated with gas injection and varying rotating speeds.

burbujas de gas para la eliminación de impurezas como el hidrógeno se beneficia, si el baño está bien mezclado.

4.2.1. Efecto de la velocidad de giro del rotor sobre el tiempo de mezclado

La figura 5 muestra los patrones de flujo obtenidos al variar la velocidad de giro de rotor de: a) 200 rpm, b) 400 rpm y c) 600 rpm), utilizando una posición de inmersión de flecha estándar y un flujo de gas estándar de 0,566 m^3/min. Se observa que la magnitud de las velocidades del fundido aumentan al aumentar la velocidad del rotor. Los patrones de flujo observados en la figura 5 muestran una ligera variación respecto a los de la figura 4, donde aún no se ha inyectado gas al baño. En el caso a de la figura 5 se observan los vectores de velocidad del líquido asociados al gas que ingresa a la olla (cuchara) por la boquilla situada en la parte inferior del rotor. Se observa, en este mismo caso, que el líquido cercano al eje presenta una componente de velocidad axial dirigida hacia la superficie del baño, lo que indica que las fuerzas de arrastre del gas que ascienden son superiores a las que promueven el efecto recirculatorio observado en los patrones de flujo que se obtienen sin inyección (Fig. 4). Al comparar el caso a) con el caso c) de la figura 5, también se observa con claridad este fenómeno. La dirección de los ojos de recirculación es contraria, en ambos casos; en el caso de velocidad de giro baja (caso a), la recirculación se produce al contrario de las manecillas del reloj, mientras que a altas velocidades de giro (caso c) la recirculación va en el sentido de las manecillas del reloj. Es decir, la presencia de burbujas de gas que ascienden a través del metal líquido produce un término extra de *momentum*, asociada al arrastre del gas sobre el metal y que modifica los patrones de flujo en el líquido.

La figura 6 muestra los contornos de fracción volumétrica de gas cuando se han variado las velocidades de giro del rotor, donde el efecto del giro del rotor sobre la formación del vórtice está definido con claridad, es decir, a mayor velocidad de giro mayor vórtice. Las gráficas inferiores de la figura muestran la fracción de gas dentro del baño, utilizando isolíneas con dos escalas distintas, útiles para ver la forma en que la pluma de burbujas de gas se dispersa dentro de la olla (cuchara) (mostrando las concentracio-

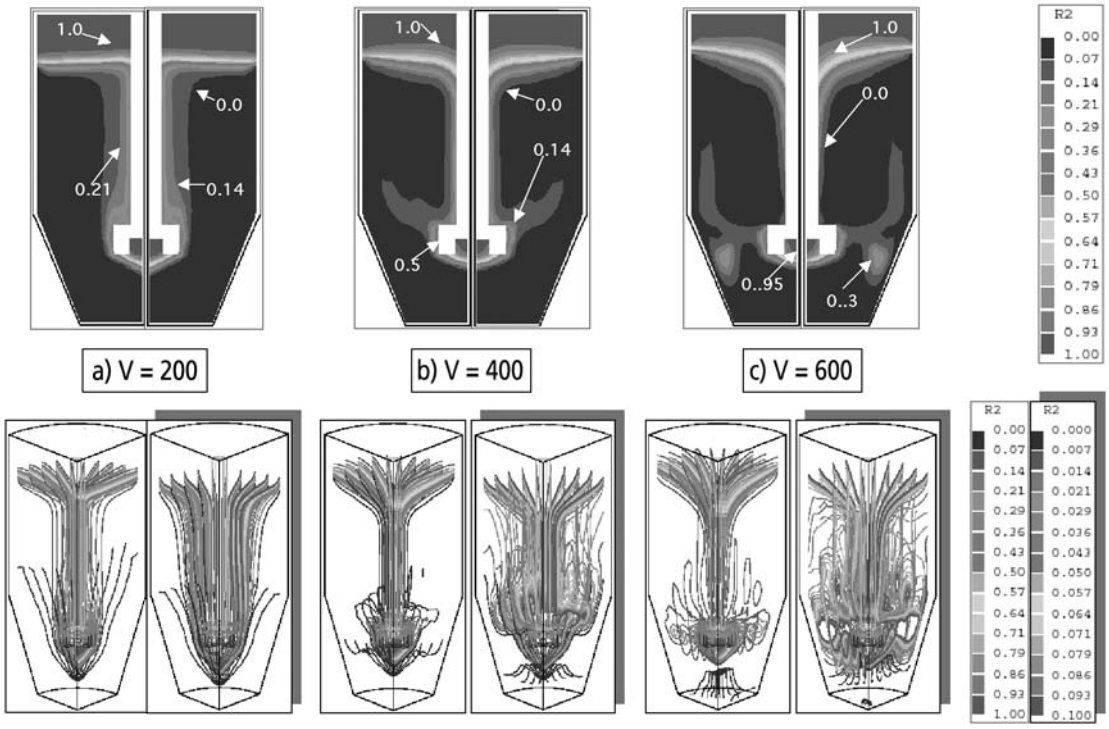

Figura. 6. Fracciones de gas variando la velocidad de giro de rotor con inyección de gas.

Figure. 6. Contours of gas fraction calculated with gas injection and different rotation speeds.

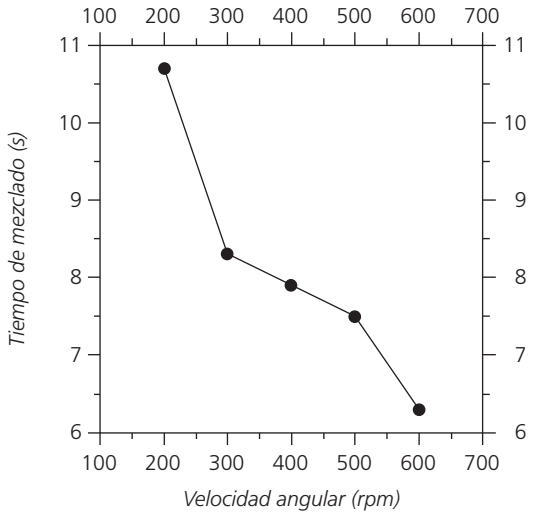

Figura. 7. Tiempos de mezclado en función de la velocidad de giro del rotor con inyección de gas.

Figure. 7. Mixing times with gas injection as a function of the rotating speed of the impeller.

nes de gas dentro del baño). En la figura puede observarse que, definitivamente, las velocidades altas del rotor permiten una mejor distribución de la pluma de gas permitiendo que éste logre llegar hasta las paredes de la olla (cuchara), ya que la fuerza radial con la que el líquido es arrojado hacia las paredes de la olla (cuchara) es mayor y, por ende, arrastra más fácilmente al gas, distribuyéndolo a través de todo el rotor. Es decir, predomina la fuerza de arrastre del líquido sobre el gas, que la fuerza de flotación/empuje que hace que las burbujas asciendan. Por el contrario, al utilizar velocidades bajas de giro, el gas tiende a subir de forma vertical pegado a la flecha y la pluma se dispersa muy poco. También se aprecia que a pesar de que el rotor impulsa al gas hacia las paredes de la olla (cuchara), éste tiende a adherirse al eje conforma asciende por arrastre del metal líquido que fluye hacia la flecha por un efecto "torbellino" en el que las fases más pesadas (más densas) tienden a dirigirse a las paredes del recipiente por acción centrífuga, mientras que las más ligeras (menos densas) hacen lo contrario, lo que genera zonas de poca concentración de gas en las esquinas superiores del baño. Por último, las gráficas muestran que el gas inhibe la formación del vórtice, ya que analizando los vórtices formados con y sin inyección de gas (Figs. 4 y 6) se nota una clara disminución del vórtice, lo cual se explica por el *momentum* ascendente del gas que rompe por la superficie libre y que inhibe la formación del vórtice.

La figura 7 muestra los tiempos de mezclado al variar las velocidades de giro del rotor (200, 400 y 600 rpm), donde se observa que al aumentar la velocidad de giro de rotor disminuye drásticamente

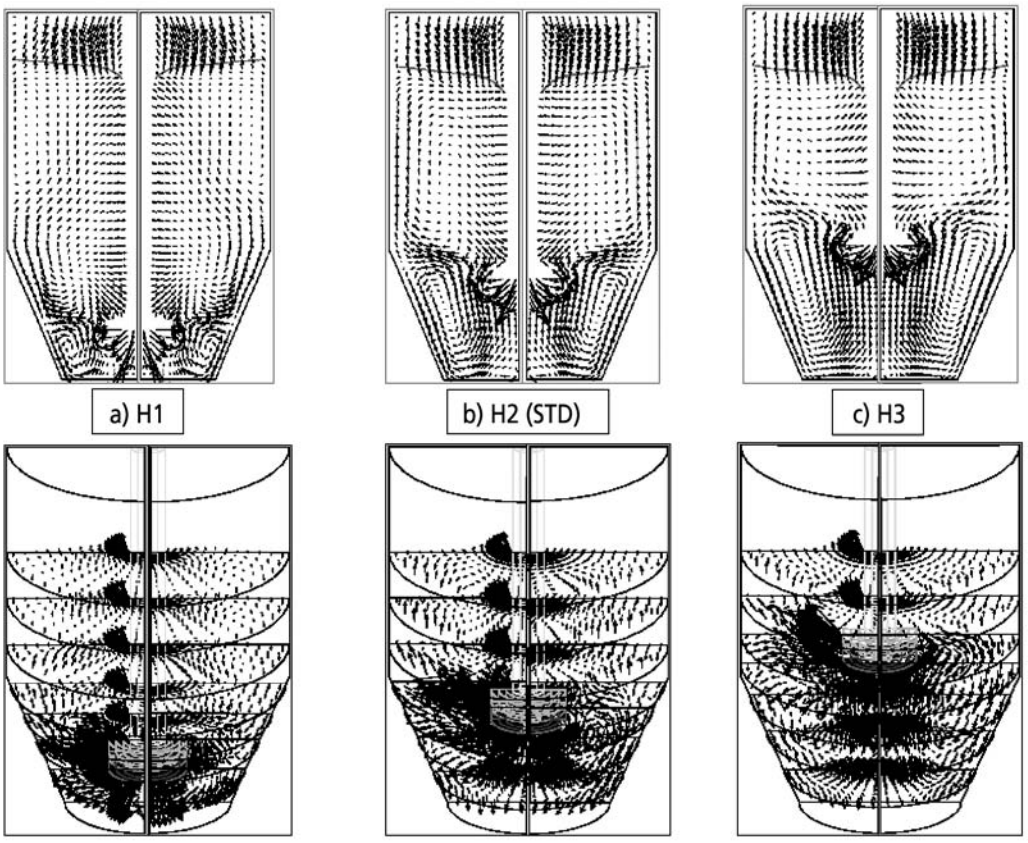

Figura. 8. Perfiles de velocidad a distintas alturas de inmersión de la flecha inyectando gas.

Figure. 8. Velocity profiles calculated with gas injection by varying the immersion depth.

el tiempo de mezclado. Al aumentar la velocidad del rotor, el tiempo de mezclado disminuye desde 14,8 s para una velocidad de 200 rpm hasta 3,3 s, al girar el rotor a 600 rpm. Este resultado está en plena concordancia con los resultados presentados hasta ahora, ya que al aumentar la velocidad angular de rotación aumenta la turbulencia y la circulación factores que mejoran el mezclado.

4.2.2. Efecto de la distancia de inmersión de la flecha sobre el tiempo de mezclado

La figura 8 muestra los patrones de flujo de los casos en que la flecha se introdujo a distintas alturas en la olla (cuchara) (inmersiones de: a) 0,091 m, b) 0,229 m y c) 0,396 m), mientras que la velocidad de giro del rotor y el flujo de gas permanecen constantes. Dicha figura, muestra que el posicionamiento de rotores por encima del cono truncado promueve una mejor circulación de líquido en la olla (cuchara) cuando se inyecta gas, mientras que al posicionar el rotor muy cerca del piso, se provocan zonas muertas en la parte media alta de la olla (cuchara). Esto, se debe a que la presión hidrostática a vencer por el fluido que se encarga de generar la recirculación es mucho mayor, lo que provoca que esta recirculación por encima del rotor se inhiba. También, se observa que cuando el rotor está cerca del piso, se presenta un choque directo del chorro de gas inyectado con el piso de la olla (cuchara), lo cual puede generar un excesivo desgaste del revestimiento de la olla (cuchara) en esa zona (Fig. 8a). Además, las paredes del piso y del cono actúan como barreras inhibiendo la adecuada circulación de metal. Por lo anterior, se deduce que la mejor agitación se presenta en los casos en que el rotor se ubica en una zona media-alta, aunque también el vórtice se ve más pronunciado en estas zonas sobre todo cuando la flecha se encuentra en una posición muy cercana a la superficie libre.

La figura 9 muestra los contornos de fracción de gas, también cuando se ha variado la distancia de inmersión de la flecha, manteniendo la misma velocidad de giro del rotor y el mismo flujo de gas. Los contornos de fracción de gas de la figura 9 muestran que, al colocar el rotor más cerca del piso de la olla (cuchara), la pluma de gas se distribuye mejor en el baño; mientras que la agitación de éste puede no ser la más adecuada, es decir, puede no propiciar el mejor mezclado. El gas inyectado por los rotores en

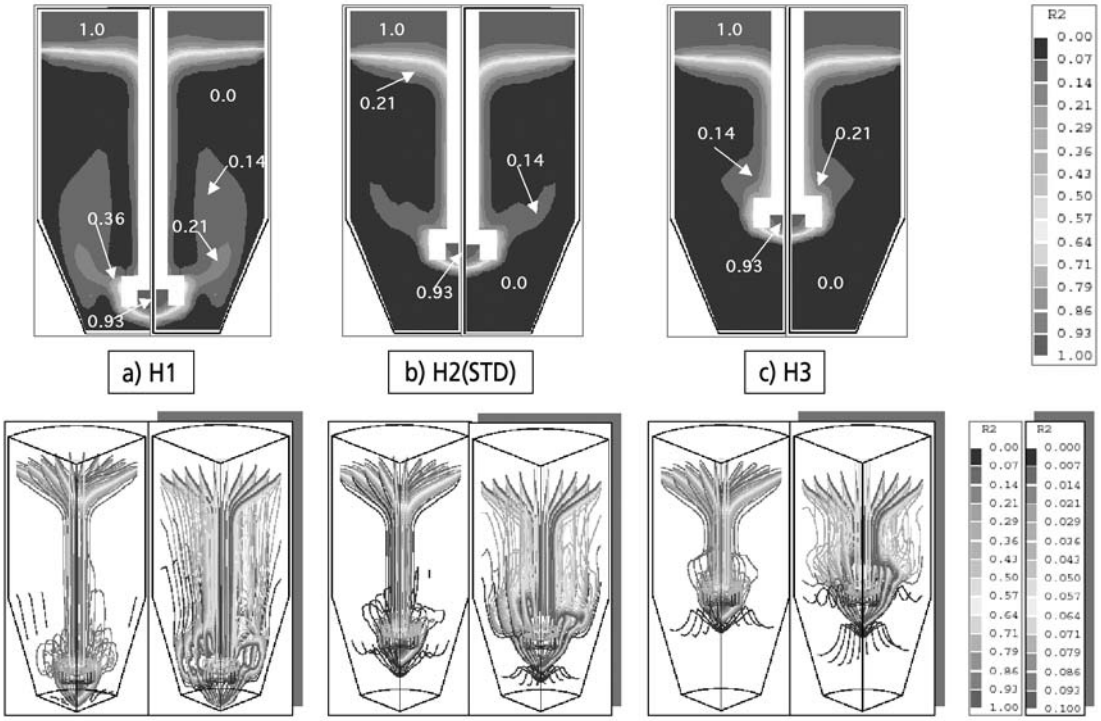

Figura. 9. Contornos de fracciones de gas a distintas alturas de inmersión de la flecha inyectando gas.

Figure. 9. Contours of gas fraction calculated with gas injection and different immersion depths of the impeller.

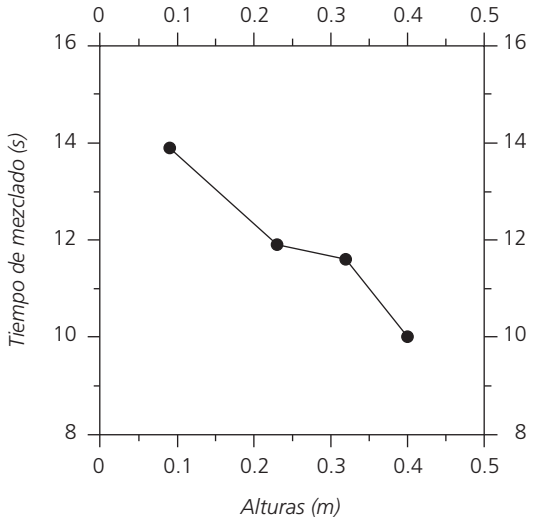

Figura. 10. Tiempos de mezclado en función de la distancia de inmersión de la flecha con inyección de gas.

Figure. 10. Mixing times with gas injection as a function of the immersion depth of the impeller.

posición media-alta en la olla (cuchara) no se dispersa de forma muy adecuada en la olla (cuchara), principalmente por que no alcanza las zonas inferiores de ésta. Esto puede no ser lo más recomendable si lo que se desea es deshidrogenar el baño, porque para esto se requiere que el baño esté en mayor contacto con el gas. Aunque se debe recalcar que, en este caso, existe una buena agitación (turbulencia), es decir, el líquido estará bien mezclado, por lo que la refinación aún puede ser eficiente. Cuando el rotor se encuentra en la zona más alta (posición menos profunda de inmersión), definitivamente no se logra buena distribución de gas y los tiempos de residencia serán menores, por lo que está práctica queda descartada para realizar la desgasificación.

Los tiempos de mezclado obtenidos al variar la posición de la flecha se muestran en la figura 10, donde los tiempos de mezclado disminuyen al mantener la flecha cerca de la superficie libre, aunque quizás no sea lo más recomendable para promover el contacto metal burbuja, ya que el tiempo de residencia de las burbujas es menor. Según el análisis realizado acerca del grado de movimiento del baño se esperaba que los tiempos de mezclado fueran menores al colocar el rotor por encima del cono truncado de la olla (cuchara), lo que se corrobora en la figura 10.

4.2.3. Efecto del factor de forma de la olla (cuchara) sobre el tiempo de mezclado

El efecto del factor de forma de la olla (cuchara) (H/D), en los patrones de flujo, se muestra en la fi-

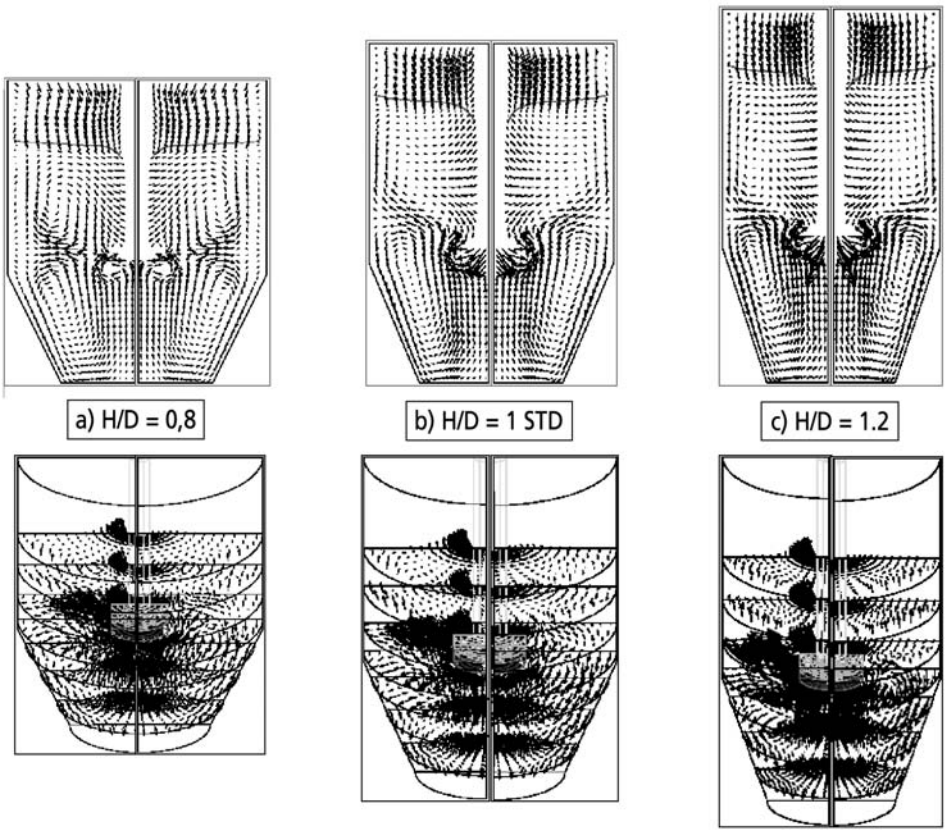

Figura. 11. Perfiles de velocidad variando el factor de forma de la olla (cuchara) con inyección gas.

Figure. 11. Velocity profiles calculated with gas injection by varying the aspect ratio of the ladle.

gura 11, donde se mantuvieron constantes la velocidad de giro de rotor, el flujo de gas y la masa de líquido contenida en el reactor. Los factores de forma en la figura son los siguientes: a) H/D= 0,8, b) H/D= 1,0 y c) H/D= 1,2.

Los patrones de flujo para las distintas relaciones altura-diámetro de la olla (cuchara) muestran una diferencia en la formación de los ojos de recirculación en la olla (cuchara). De las figuras superiores se puede observar que la distribución de la energía cinética del líquido es más uniforme al usar ollas (cucharas) de mayor diámetro y menor altura (H/D=0.8), lo cual es ventajoso para la agitación del baño. Por otro lado, en los reactores esbeltos (H/D=1.2) se presenta una gran densidad vectorial, sólo en la zona adyacente al rotor mientras que se observan zonas poco agitadas en otras ubicaciones de baño. Los ojos de recirculación vuelven a ser más alargados en dirección axial cuando se usan ollas (cucharas) de mayor altura lo que promueve que el líquido tenga que vencer mayores presiones hidrostáticas al ascender por las paredes para formar los ojos de recirculación por encima del rotor en la olla (cuchara). En las ollas (cucharas) con baja relación H/D, se observan ojos de recirculación mucho más definidos además de un vórtice menos pronunciado como se ve en la figura 12.

La figura 12 muestra los contornos de fracción de gas de los casos en los que se varió el factor de forma de la olla (cuchara), manteniendo constante la velocidad de giro de rotor y el flujo de gas. La forma en que la pluma se dispersa es muy similar en los tres casos, variando un poco más la forma del vórtice, presentándose con mayor profundidad cuando se tienen ollas (cucharas) con H/D mayores. Conviene señalar que el principal promotor de formación del vórtice es la velocidad de giro del eje, que promueve caídas de presión en el líquido adyacente a él y, también, promueve fuerzas centrífugas, siendo estas fuerzas centrífugas balanceadas por los gradientes de presión radial. Al estar más cerca la pared del rotor, estas presiones radiales serán mayores y ocasionarán la formación de un vórtice más pronunciado.

Las gráficas de los tiempos de mezclado en función del factor de forma de la olla (cuchara) se muestran en la figura 13, donde se ve que los tiempos de mezclado crecen al incrementarse la relación altura/diámetro (factor de forma) en la olla (cuchara), es decir, los tiempos de mezclado se pueden

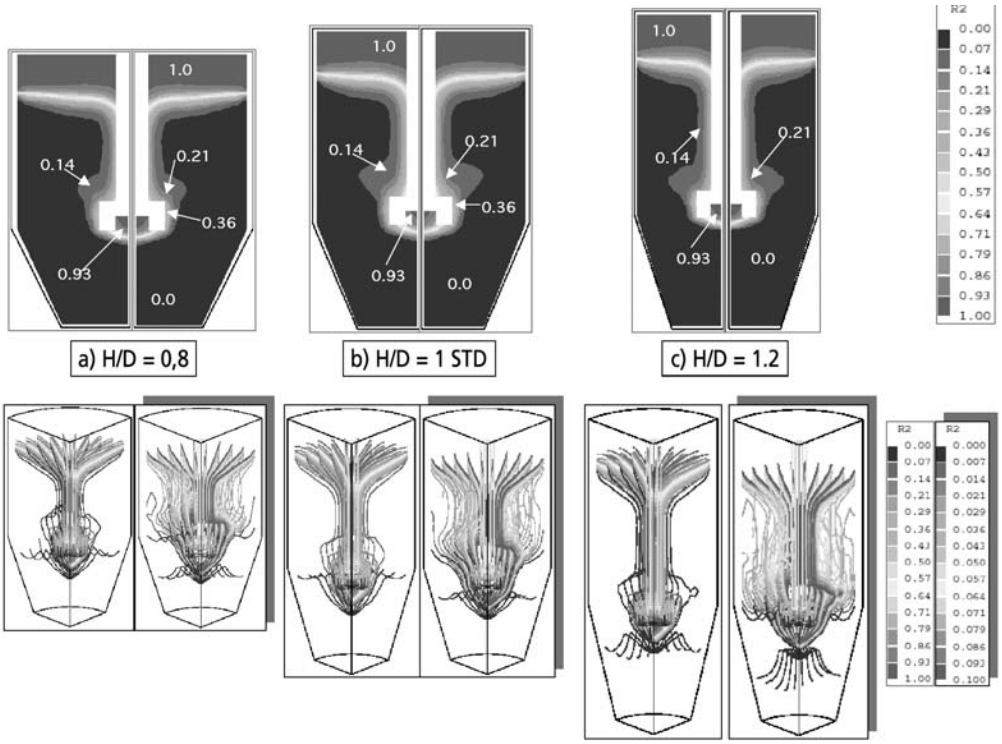

Figura. 12. Fracciones de gas variando el factor de forma de la olla (cuchara) con inyección de gas.

Figure. 12. Contours of gas fraction calculated with gas injection and different aspect ratios of the ladle (H/D).

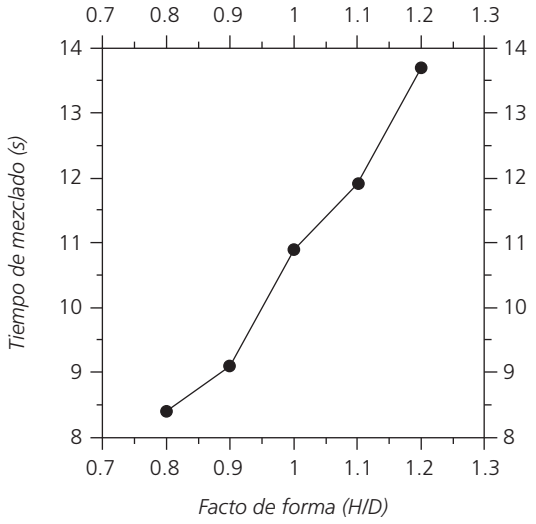

Figura. 13. Tiempos de mezclado en función del factor de forma de la olla (cuchara) con inyección de gas.

Figure. 13. Mixing times with gas injection as a function of the aspect ratio of the ladle.

minimizar al utilizar ollas (cucharas) con H/D < 1, ya que la turbulencia está mejor distribuida y el metal circula mejor a través del dominio entero. Una ventaja adicional de estas ollas (cucharas) con H/D bajo es que el vórtice formado disminuye.

4.2.4. Efecto del tipo de rotor sobre el tiempo de mezclado

La figura 14 muestra los patrones de flujo obtenidos al utilizar tres distintos tipos de rotor en la olla (cuchara): a) rotor estándar, b) rotor liso y c) rotor muescado, con la misma velocidad de rotor y flujo de gas. La magnitud de los vectores de la figura indica un baño más agitado al utilizar un rotor muescado, excepto en pequeñas zonas en la parte superior del horno. En este caso no se muestran ojos de recirculación muy definidos por lo que en ciertas zonas, como en los extremos justo debajo de la superficie libre, se encuentran zonas muertas, aunque los patrones de flujo son muy complejos. El rotor liso presenta un ojo de recirculación muy pequeño, lo que provoca que el líquido en contacto con la superficie libre esté relativamente quieto. Así, el uso de rotores muescado y el estándar presentan las mejores configuraciones para la adecuada circulación de líquido por toda la olla (cuchara). Definitivamente, al crear una zona de baja presión debajo del rotor debido al hueco que este tiene, beneficia la recirculación en el baño porque crea los gradientes de presión necesarios para agitar al baño. El vórtice generado es muy similar, aunque ligeramente menos pronunciado, al utilizar un rotor

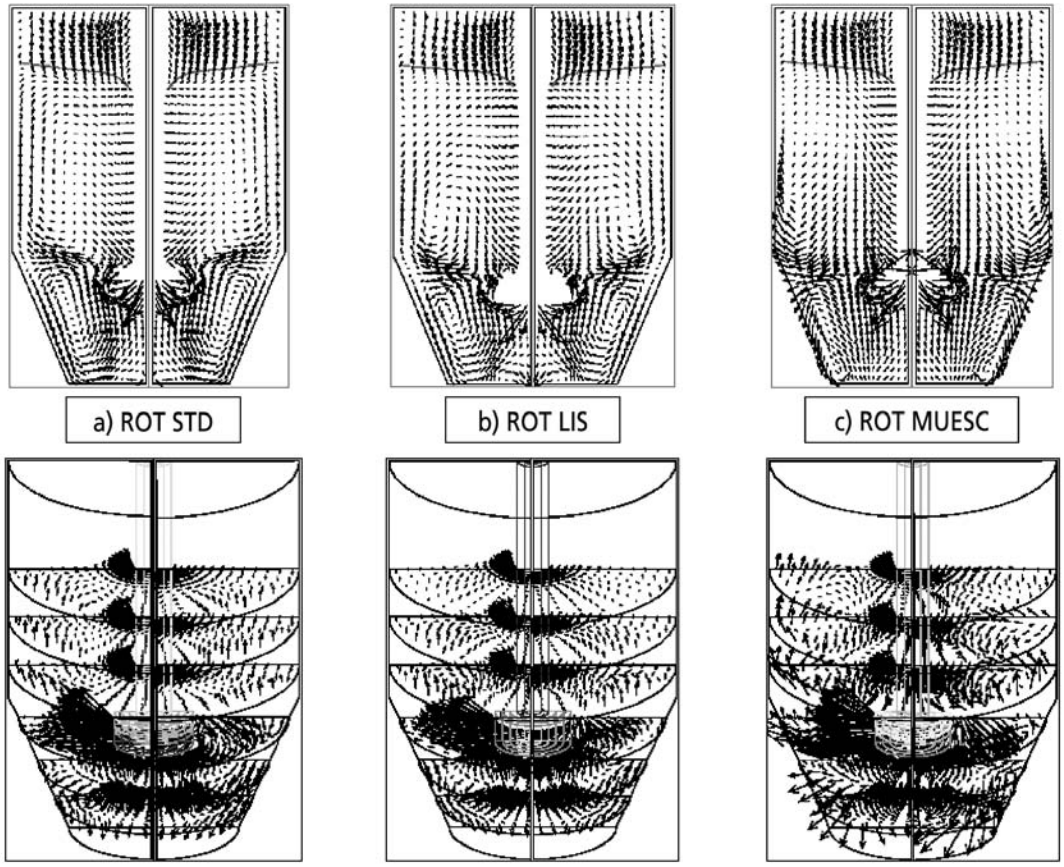

Figura. 14. Perfiles de velocidad variando el tipo de rotor con inyección de gas.

Figure. 14. Velocity profiles calculated with gas injection by varying the type of impeller.

liso, el cual, a su vez, presenta el menor grado de agitación.

La figura 15 muestra los contornos de fracción de gas en la olla (cuchara) al utilizar los tres tipos de rotores simulados usando la misma velocidad de giro de rotor y flujo de gas, donde se observa mucho mejor distribuido el gas cuando se emplea un rotor muescado. Esto, se debe a que el líquido cercano al rotor, que contiene una alta concentración de gas, es impulsado con mucha inercia hacia las paredes de la olla (cuchara), debido al golpeteo de las muescas con la fase líquida, teniendo una pluma más expandida. Esto es benéfico ya que las burbujas de gas se encontrarán en mayor contacto con el líquido, lo cual es muy adecuado para eliminar gases e impurezas en el baño. Con el empleo del rotor liso el gas asciende un poco más pegado a la flecha sin distribuirse de forma adecuada. La forma del vórtice se presenta muy similar en los tres casos, por lo que se concluye que no se ve afectada por el tipo de rotor.

La figura 16 muestra los tiempos de mezclado en función del tipo de rotor empleado, donde se ve que el efecto del golpeteo de líquido por las muescas del rotor muescado produce una agitación más intensa del baño (mayor turbulencia y mejor circulación), reflejándose este hecho en menores tiempos de mezclado. El rotor estándar se encuentra en una posición intermedia con una diferencia de cerca de 2 s y, el rotor liso, como se esperaba, presenta el tiempo de mezclado más alto.

4.2.5. Efecto del flujo de gas sobre el tiempo de mezclado

La figura 17 muestra los patrones de flujo, variando el flujo de gas inyectado a la olla (cuchara): a) flujo bajo 0,142m^3/min, b) flujo medio 0,566m^3/min y c) flujo alto 1,134 m^3/min; y se mantuvieron constantes la velocidad de giro y la posición del rotor. Se observa que el vórtice y la superficie libre se localizan en una posición mas alta cuando se inyecta más cantidad de gas por lo que el ojo recirculatorio, en el caso c) de la Fig. 17, es más alargado en dirección axial y las velocidades son menores, sobre todo cer-

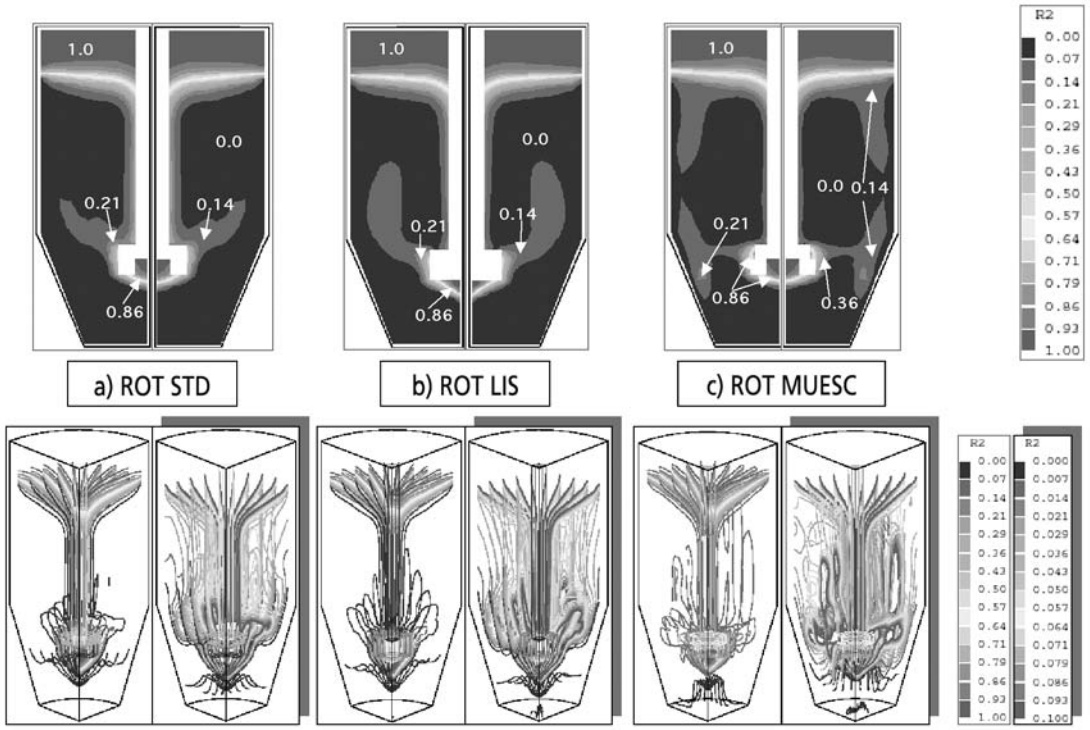

Figura. 15. Fracciones de gas variando el tipo de rotor con inyección de gas.

Figure. 15. Contours of gas fraction calculated with gas injection and different impellers.

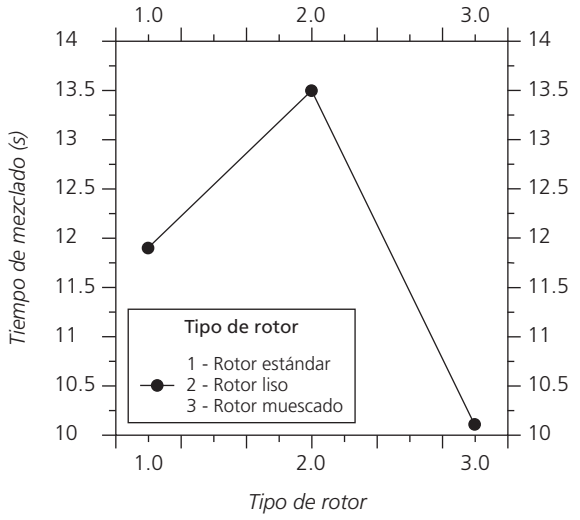

Figura. 16. Tiempos de mezclado en función del tipo de rotor con inyección de gas.

Figure. 16. Mixing times with gas injection as a function of the type of impeller.

ca de la superficie libre y del eje. Los enormes vectores de velocidad del líquido observados cerca del rotor no tienen significado físico pues, en esa zona, prácticamente solo hay gas, por lo que no debe prestársele mucha atención a esos vectores (sobre todo a flujos de gas elevados). Con flujos de gas altos, el arrastre del gas sobre el líquido empieza a dominar el patrón de flujo y, así, el líquido se mueve siguiendo la trayectoria del gas, primero hacia abajo y luego ascendente sobre el eje del rotor. Esto podría justificar el porque, al tener menores flujos, se obtuvieron menores tiempos de mezclado.

La figura 18 muestra los contornos de gas dentro del horno variando los flujos de gas: a) bajo, b) medio y c) alto, donde se aprecia que, a mayor flujo de gas la pluma crece, se distribuye mejor y el volumen del baño aumenta, elevándose la superficie libre de este. Se puede observar que el error numérico generado por la difusión falsa en la superficie libre es mayor con altos flujos de gas.

La figura 19 muestra los tiempos de mezclado obtenidos a distintos flujos de gas, donde se presenta un incremento en los tiempos de mezclado al incrementar el flujo de gas, lo que puede contradecir a la idea generalizada que plantea que, siempre que se inyecta gas a un baño metálico, este, tiende a mejorar la agitación del mismo. La explicación que le damos a este hallazgo es que los patrones de flujo promovidos por el ascenso de las burbujas de gas son contrarios a los patrones de flujo promovidos por la rotación del rotor y, por tanto, la inyección de gas modifica o amortigua la agitación provocada por el rotor.

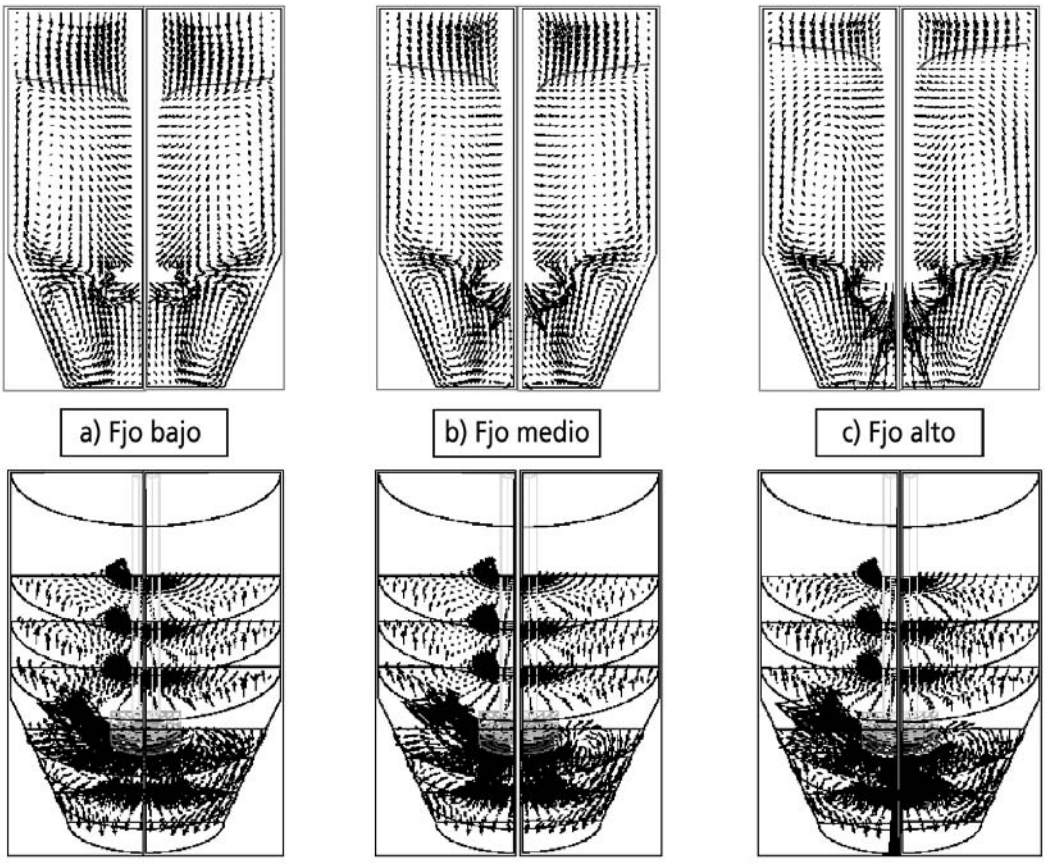

Figura. 17. Perfiles de velocidad variando el flujo de gas.

Figure. 17. Velocity profiles calculated with gas injection by varying the gas flow rate.

4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se desarrolló un modelo matemático del tipo Euleriano-Euleriano para estudiar el flujo de fluidos y el mezclado en ollas (cucharas) de tratamiento de aluminio equipadas con rotor-inyector variando algunos parámetros del proceso como la velocidad de giro del rotor, la distancia de inmersión de la flecha, el flujo de gas, el tipo de rotor y el factor de forma de la olla (cucharas) (relación altura–diámetro). El modelo matemático se llevó a cabo en dos etapas: simulación sin inyección de gas y simulación con inyección de gas a través del rotor, esto, debido a que ambas etapas se presentan en el proceso real. El modelo arrojó resultados numéricos y gráficos de los patrones de flujo, de la estructura turbulenta, del perfil de presiones y de la forma del vórtice que, posteriormente, fueron analizados y de los cuales se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- Al aumentar la velocidad de giro del rotor disminuyen los tiempos de mezclado, sin considerar los efectos del vórtice.
- Al colocar al rotor en la zona media-alta de la olla (cuchara) (H= 0,25 – 0,4 m), con una altura total de la olla (cuchara) de 0,98 m y una relación H/D = 1, se obtuvieron los tiempos de mezclado más bajos.
- El tiempo de mezclado disminuye al emplear ollas (cucharas) de menor altura y de mayor diámetro. Por tanto, un factor de forma de 0,8 es el más apropiado.
- Con el uso de un rotor muescado, los tiempos de mezclado obtenidos disminuyen considerablemente, de tal forma que este rotor es el más recomendable. El diseño del rotor es, sin duda, un parámetro crítico que repercute en la eficiencia misma del proceso de refinación, por lo que un estudio serio para encontrar el diseño óptimo de rotor es necesario.
- A mayor cantidad de gas inyectado se obtuvieron mayores tiempos de mezclado, por lo que para fines de tiempos de mezclado reducidos, los flujos bajos de gas (0,142 m^3/min) son más recomendables, lo cual abre la posibilidad de mejorar el diseño del sistema de desgasificación.

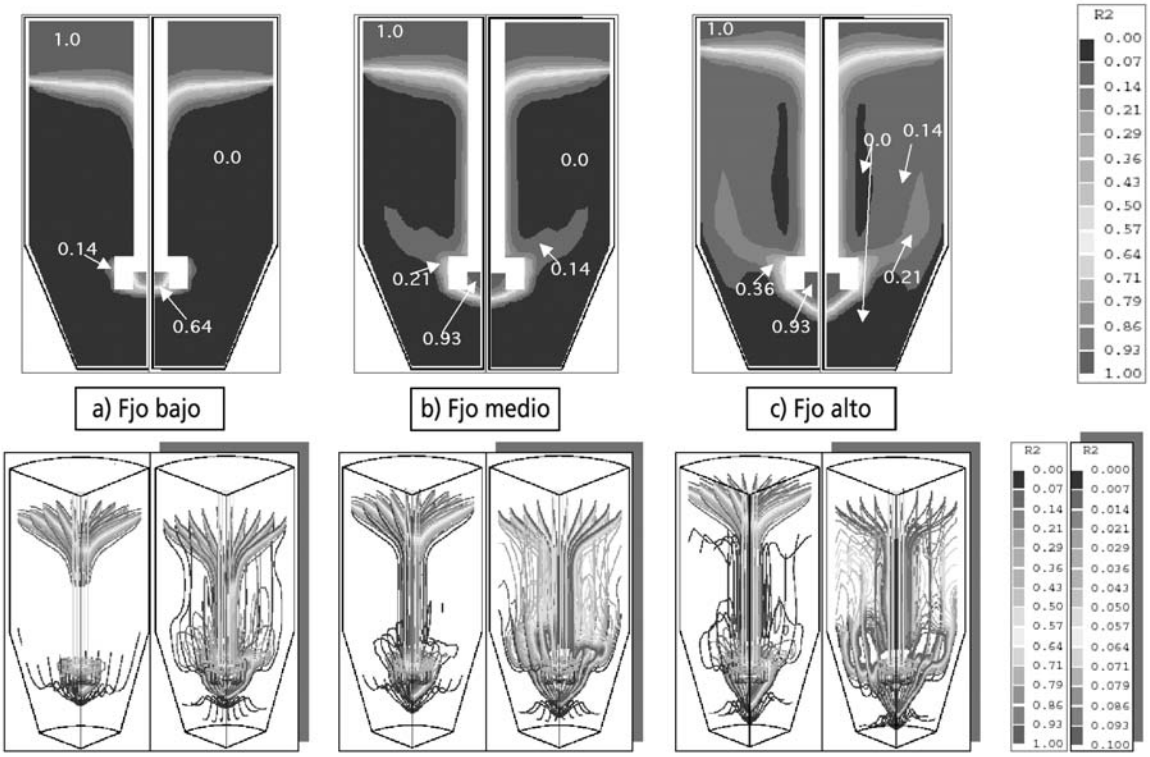

Figura. 18. Contornos de las fracciones de gas variando el flujo de gas.

Figure. 18. Contours of gas fraction calculated with different gas flow rates.

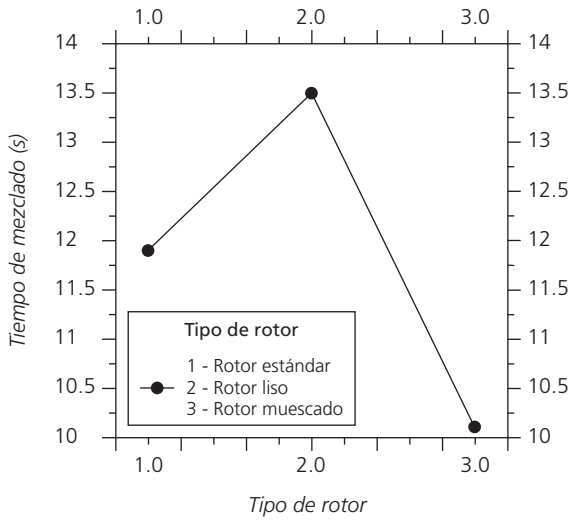

Figura. 19. Tiempos de mezclado en función del flujo de gas.

Figure. 19. Mixing times with gas injection as a function of the gas flow rate.

Agradecimientos

Los autores de este trabajo desean agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México (CONACYT) por su soporte económico a través del proyecto 2202-C01-40241/A-1.

REFERENCIAS

[1] O. M. SUÁREZ, *Rev. Metal Madrid* 40 (2004) 173-181.

[2] A. MOLSALVE Y R. MORALES, *Rev. Metal. Madrid* 40 (2004) 431-435.

[3] G. K. SIGWORTH Y T.A ENGH, *Metall. Trans. B*, 13 September (1982) 442-460.

[4] J. G. STEVENS Y H. YU, *Light Metals 1992 Proc. 121st TMS Annual Meeting*, San Diego, CA, (USA), 1991, Publ. by Minerals, Metals & Materials Soc. (TMS), Warrendale, PA, USA, pp. 1.023-1.029.

[5] J. F. GRANDFIELD, D.W. IRWIN, S. BRUMALE Y C. J. SIMANSEN, *Light Metals 1990 Proc. 119th TMS Annual Meeting*, Anaheim, CA, (USA), 1990, Publ. by Minerals, Metals & Materials Soc. (TMS), Warrendale, PA, USA, pp. 737- 746.

[6] M. NILMANI, P.K. THAY Y C.J. SIMENSEN, *Light Metals 1992 Proc. of the 121st TMS Annual Meeting*, San Diego, CA, (USA), 1991, Publ. by Minerals, Metals & Materials Soc. (TMS), Warrendale, PA, USA, pp. 939-945.

[7] F. BOEUF, M. REY, Y E. WUILLOUD, *Light Metals 1993*

Proc. of the 122nd Annual Meeting, Denver, CO, USA, 1993, Publ by Minerals, Metals & Materials Soc (TMS), Warrendale, PA, USA, pp. 927-932.

[8] M. NILMANI, P.K. THAY, C. J. SIMANSEN, Y D.W. IRWIN; *Light Metals 1990 Proc. of the 119th TMS Annual Meeting*, Anaheim, CA, (USA), 1990, Publ. by Minerals, Metals & Materials Soc. (TMS), Warrendale, PA, USA, pp. 747- 754.

[9] C. LEROY Y G. PIGNAULT; *JOM-J Min. Met. Mat. S.* 43 (1991) 27-30.

[10] Y. OHNO, D. T. HAMPTON Y A. W. MOORES; *Light Metals 1993 Proc. of the 122nd Annual Meeting*, Denver, CO, (USA), 1993, Publ. by Minerals, Metals & Materials Soc. (TMS), Warrendale, PA, USA, pp. 915-921.

[11] M. MANIRUZZMAN Y M. MAKHLOUF; *Light Metals Proc. of the 1997 127th TMS Annual Meeting*, San Antonio, TX, (USA), 1998, Minerals, Metals & Materials Soc (TMS), Warrendale, PA, USA, pp. 797-803.

[12] M. MANIRUZZAMAN Y M. MAKHLOUF; *Metall. Trans. B* 33 (2002) 297-303.

[13] DONGS, S.T. JOHANSEN Y T.A. ENGH; *Chem. Eng. Sci.* 49 (1994) 3.511-3.518.

[14] G.L. LANE, M.P. SCHWARZ Y G.M. EVANS; *Appl. Math. Model.* (2002) 223-235.

[15] J. MIETZ Y F. OETERS: *Steel Res.* 59 (1988) 52-56.

[16] PHOENICS On-Line Information System (POLIS); PHOENICS 3.4. CHAM Company. 2000.

[17] J. SZEKELY, *Fenómenos de Flujo de Fluidos en Procesamiento de Metales*, Ed. Limusa, México, D.F., México, 1988.

[18] B. E. LAUNDER Y D. B. SPALDING: *Comput. Method. Appl. M.* (1974) 269-289.

[19] F. CONTRERAS-BUSTOS, Tesis de Maestría, Centro de Graduados en Materiales, Instituto Tecnológico de Morelia, 2005.

[20] J. E. GRUZLESKI Y B. CLOSSET, *Treatment of Liquid Aluminum-Silicon Alloys*, American Foundry Society; USA, pp. 143-181, 1990.