

Modelización y simulación de la etapa de compactación en PM*

M. D. Riera** y J. M. Prado**

Resumen

La industria pulvimetalúrgica está interesada en extender las aplicaciones y mejorar la calidad de sus productos. Para ello, necesita un conocimiento detallado de sus procesos que permita su control. La representación del comportamiento mecánico de estos materiales se ha realizado utilizando diversos tipos de modelos; en la actualidad, la mayoría de los grupos de trabajo considera a los polvos metálicos como materiales granulares. Los modelos de plasticidad definidos para los materiales geológicos se están aplicando a los agregados metálicos. Sin embargo, ninguno de los modelos conocidos puede representar adecuadamente su comportamiento mecánico, especialmente en estados de fallo.

Palabras Clave

Plasticidad. Materiales granulares. Compactación de polvos metálicos. Modelización.

Modelling of the plasticity in cold compaction of metal powders

Abstract

Powder metallurgical industry is very interested in spreading its applications and improve the quality of the PM products. Therefore, a detailed knowledge of their processes, in order to control them, is necessary. Many different types of models have been used to represent the mechanical behaviour of these materials; however, nowadays, most of the groups working in this field admit that metallic powders and green compacts have to be considered as granular materials. Plasticity models specially defined for geological materials are being applied on metallic aggregates. Nevertheless, none of the known ones can represent adequately their mechanical behaviour, specially in states of failure.

Keywords

Plasticity. Granular materials. Compaction of metal powders. Modelling.

1. INTRODUCCIÓN

Aparte de sus numerosas ventajas, la pulvimetalurgia presenta también algunas restricciones. Algunas de ellas dependen del propio proceso y afectan principalmente al diseño de la pieza. Los requerimientos geométricos y los que conciernen a la tenacidad limitan las posibilidades de esta tecnología. Otro tipo de limitaciones, también bien establecidas, están asociadas a la etapa de compactación: la fricción entre las partículas y las herramientas induce en el compacto una distribución no uniforme de densidad. El estado

de tensiones heterogéneo que se desarrolla, especialmente durante la eyección del molde, produce, frecuentemente, grietas en la preforma e incluso la fractura del molde.

Todos estos problemas se han resuelto tradicionalmente mediante métodos de *trial and error*. Sin embargo, el desarrollo reciente de nuevas y eficientes herramientas de cálculo puede contribuir a reducir el coste del diseño de los procesos de fabricación y contribuir a mejorar la calidad del producto final. A este respecto, el principal objetivo de la simulación numérica es determinar la forma óptima de producir piezas sin de-

* Trabajo recibido el día 18 de septiembre de 2006 y aceptado en su forma final el día 10 de octubre de 2006.

** Departamento de Ciencia de los Materiales e Ingeniería Metalúrgica, Universidad Politécnica de Cataluña, España.

fectos. Para ello, se necesita un conocimiento profundo de la mecánica y micro-mecanismos de la deformación durante el proceso; la influencia de variables como la geometría, la fricción y las propiedades de los materiales deben ser bien conocidas para poder definir correctamente las herramientas y su cinemática, los parámetros del proceso y obtener la capacidad de predecir y evitar la aparición de defectos. La simulación por ordenador constituye la técnica más utilizada en la industria del conformado metálico; sin embargo, su éxito depende del modelo empleado para representar el comportamiento del material. A diferencia de los materiales más convencionales, el comportamiento mecánico de estos agregados de partículas todavía no es bien conocido. No existe una teoría ampliamente aceptada que explique el comportamiento mecánico de las partículas durante la compactación; no hay acuerdo en el modelo plástico, mientras que el comportamiento elástico, prácticamente, ha sido ignorado. En este trabajo se pretende presentar los diferentes modelos utilizados en la actualidad en este campo.

La consolidación de un polvo metálico empieza por el llenado y transferencia del polvo en el molde. Este estadio, actualmente en estudio^[1], se caracteriza por la distribución de densidad del polvo no compactado y depende no solo de la naturaleza de las partículas sino también de los métodos de llenado y de transferencia en el molde. Se han publicados varios modelos basados en diferentes teorías^[2-4]. Después del llenado del molde se comprime el polvo para producir un agregado metálico. Esta etapa ha sido descrita por Seeling y Wolf^[5] que definen tres estadios durante la compresión. En el primero, que corresponde a los más bajos esfuerzos aplicados, las partículas se reordenan. En el segundo estadio, se produce la deformación elastoplástica de las partículas a través de sus áreas de contacto. Estos dos estadios pueden producirse simultáneamente desde el comienzo de la compactación^[6]. Dos tipos de endurecimiento actúan: el de deformación plástica de las partículas y el geométrico debido al aumento progresivo del área de contacto entre estas partículas. En el último estadio, bajo esfuerzos elevados, solo actúa la deformación elástica.

El compacto es un agregado de partículas deformadas que pueden desplazarse, unas respecto a otras. Exhibe, por tanto, las características principales de los materiales granulares: porosidad entre las partículas y deslizamiento entre ellas a lo largo de sus contactos. Un aspecto importante, es la dilatación bajo esfuerzos uniaxiales de compresión, que ha sido observado en materiales geológicos^[7] y, más recientemente, en compactos en verde de polvo^[8-10]. La figura 1 muestra los resultados correspondientes a un ensayo de compresión aplicado a un compacto de polvo de hierro. La evolución de las componentes de la verdadera deformación permite distinguir tres partes: al comienzo de la compresión (I), las curvas muestran un "pie" inicial que corresponde a un comportamiento plástico transitorio, que se puede relacionar con fenómenos de fricción interna. Al aumentar la deformación, el esfuerzo crece rápidamente (II), con una componente elástica importante. En el estadio final (III), se alcanza un esfuerzo de saturación σ_{max} . La muestra rompe en esta última etapa. Sin embargo, antes del fallo y en el inicio de esta tercera etapa, el componente presenta dilatación (a σ_{sd}); el agregado se expande en lugar de densificarse como haría un poroso sinterizado.

En la actualidad, se utilizan, principalmente, dos tipos de modelos para representar el comportamiento mecánico: los modelos micromecánicos y los basados en la mecánica de los medios continuos.

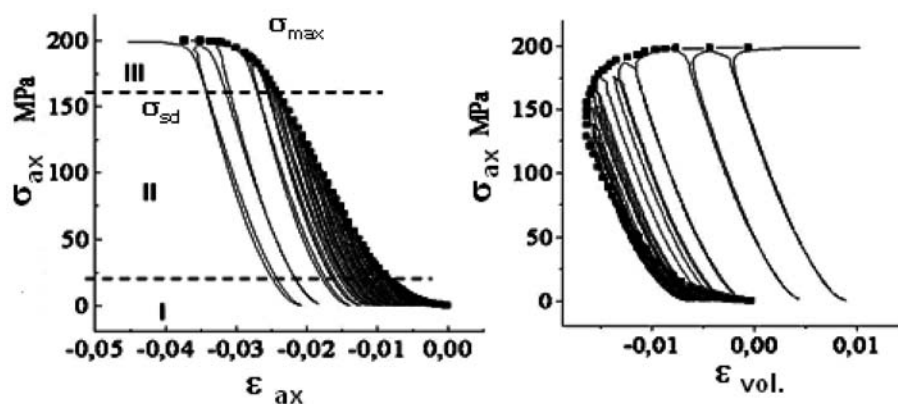


Figura 1. Evolución de las componentes de la deformación en un ensayo de compresión uniaxial^[10]. Polvo ASC 100.29, densidad 6,86 mg/m³.

Figure 1. Evolution of the components of the strain during an uniaxial compression test^[10]. Metal powder ASC 100.29. Density 6.86 mg/m³.

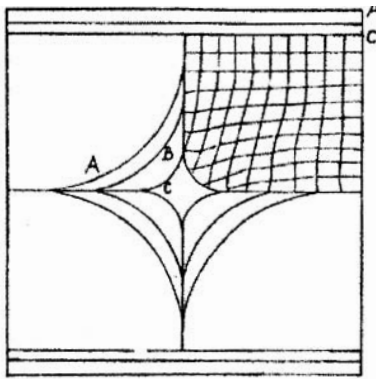


Figura 2. Modelo bidimensional^[17]. Cambio de la estructura del poro para diferentes niveles de porosidad. A=13,7 %, B=7,3 %, C=1,6 %.

Figure 2. Bidimensional model^[17]. Change in the pore structure for different level of porosity. A=13.7%, B=7.3 %, C=1.6%.

2. MODELIZACIÓN MICROMECAÁNICA

El desarrollo de modelos micromecánicos puede ayudar a comprender mejor los mecanismos que actúan durante la compactación. El conocimiento de los fenómenos físicos es imprescindible para definir las leyes constitutivas. Al analizar la compactación bajo este punto de vista, existen diversas aproximaciones. La primera, consiste en el estudio de la estructura del poro y su evolución durante el camino de carga aplicado; el análisis alternativo se basa en el re-arreglo de partículas.

El primer modelo aplicado al estudio de la compresión de partículas metálicas fue definido por Torre^[11]. En él, se supone que los poros en el compacto en verde están representados por un único poro en el centro de una esfera hueca y perfectamente plástica. Aplicando el criterio de cadencia de Tresca calculó el volumen de poros en función de la componente hidrostática. Otros muchos autores^[12-14] han seguido esta aproximación e introducido mejoras al modelo de Torre. Green^[15] y Garson^[16] aplicaron la teoría de la plasticidad en un modelo basado en el cambio de la estructura de poros.

Sundström y Fischmeister^[17] mostraron la dificultad de extender el modelo de “un poro” a un sistema multi-poro y estudiaron la compresión de un poro cóncavo definido por cuatro partículas; resolvieron el comportamiento de esta unidad por medio del método de los elementos finitos (Fig. 2). Este modelo muestra un buen acuerdo con los resultados experimentales a altas densidades e incorpora el endurecimiento geométrico del sistema.

Un mayor progreso se consigue mediante el estudio de conjuntos de partículas en contacto. Los primeros trabajos consideraban solo dos esferas^[18 y 19], pero se consiguen resultados más relevantes cuando se consi-

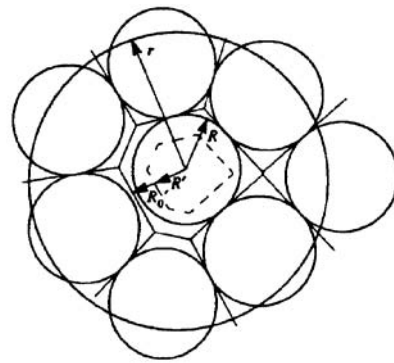


Figura 3. Esquema bidimensional de la celda de Voronoi^[22].

Figure 3. Bidimensional scheme of the Voronoi cell^[22].

deran agregados regulares o desordenados de partículas de igual tamaño sometidas a diferentes estados tensionales. En la realidad, el agrupamiento de partículas al azar es el más probable^[20 y 21]. Fischmeister, Artz y Olsson^[6] demostraron que el deslizamiento relativo entre partículas se limita al estadio inicial de la densificación; al aumentar la presión las partículas dúctiles se deforman y endurecen; los contactos entre ellas aumentan en tamaño y número. Estos autores hallaron, experimentalmente, que el número promedio de contactos por partícula (número de coordinación) aumenta casi linealmente con la presión de compactación.

Artz^[22] sugirió el uso de una celda de Voronoi promedio. Como se muestra en la figura 3, consiste en un poliedro conteniendo una partícula de polvo; el número de caras de celdas adyacentes está determinado por el número de vecinos más próximos de la partícula en cuestión. Durante la compactación, las partículas se deforman alrededor de centros fijos. Artz caracterizó la forma de esta celda y su evolución por medio de la “Función Radial de Densidad” (RDF)^[20 y 21]. Más tarde, Fischmeister y Artz^[23] incorporaron el efecto de los endurecimientos, geométrico y por deformación. Un esquema de este modelo se muestra en la figura 4.

Otros autores adoptaron este tratamiento. Entre ellos, se debe destacar el trabajo de Helle, Easterling y Ashby^[24]. Definieron una función macroscópica de cadencia a través de un tratamiento matemático más simple, válido para estados hidrostáticos. McMeeking^[25], Xu y McMeeking^[26] y Fleck, Kuhn y McMeeking^[27] encontraron una función más general que también tiene en cuenta los esfuerzos de cizalladura. La figura 5 representa el modelo analizado por estos autores y un detalle de los esfuerzos en el contacto entre dos partículas esféricas. Ogbonna y Fleck^[28] demostraron que la cadencia de un agregado de partículas depende no solo de su densidad sino también del camino de carga apli-

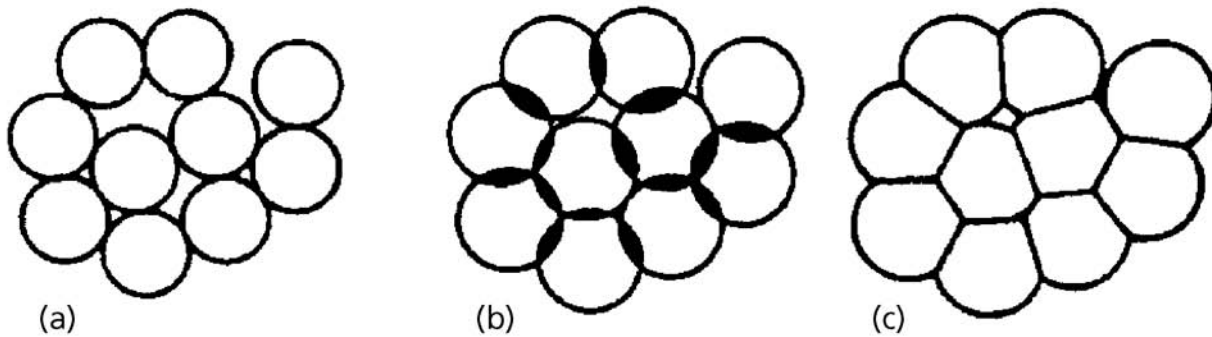


Figura 4. Modelo de Fischmeister and Artz^[23]. a) las partículas crecen alrededor de centros fijos. b) parte del material se extruye a los huecos ; c) el valor de la RDF determina el número de coordinación.

Figure 4. Model of Fischmeister and Artz^[23]. a) the particles grow around fixed centres; b) part of the material is extruded to the voids; c) the value of the RDF determines the current number of coordination.

cado. La figura 6 muestra los loci de cedencia correspondientes a dos estados tensionales diferentes.

La investigación en este campo ha dado valiosos resultados. En este sentido Molerus^[29] dijo en un interesante artículo: “From the practical as well as from the scientific point of view, it should be useful to search for a connection between the continuum mechanics approach and the particles approach, in order to arrive at a deeper insight into the behaviour of cohesive powders” .

3. MODELO CONTINUO

La cedencia de los materiales no densos es más complicado que el presentado por los materiales totalmente densos; en el caso anterior, el comportamiento mecánico

co puede dar lugar a cambios de volumen; la cedencia depende no solo de la componente desviadora del esfuerzo sino también de la componente hidrostática. En consecuencia, muchos investigadores han definido modelos de plasticidad modificando el criterio de Von Mises incluyendo el efecto de la componente hidrostática^[30 y 31]. La mayoría de estos modelos generan superficies de cedencia elípticas que predicen el mismo comportamiento en tracción y compresión (Fig. 7).

Los modelos más importantes son los propuestos por Green^[15] y Guurson^[16]. Roscoe *et al.*^[32] mostraron que un grupo de bolas de acero sometidas a diferentes caminos de carga se comporta como un material granular sin cohesión. Por lo tanto, el tipo de modelo definido para materiales geológicos se utiliza también con éxito en el caso de agregados de partículas metálicas. Definen el concepto de “estado crítico” y, basado en ello, definen el modelo *CAM-clay* modifica-

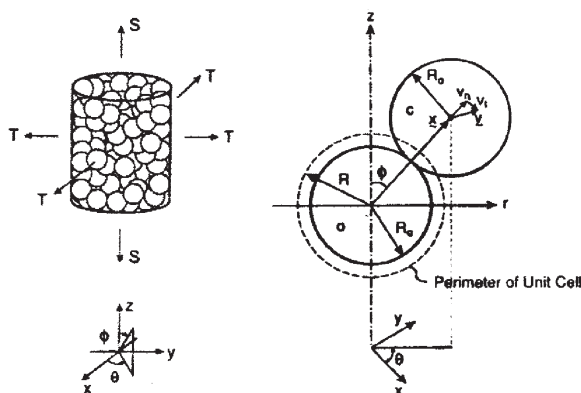


Figura 5. Modelo micromecánico de Fleck, Kuhn and McMeeking^[27]. Detalle del contacto entre partículas.

Figure 5. Macroscopic element corresponding to the model by Fleck, Kuhn and McMeeking^[27]. Detail of the contact between particles.

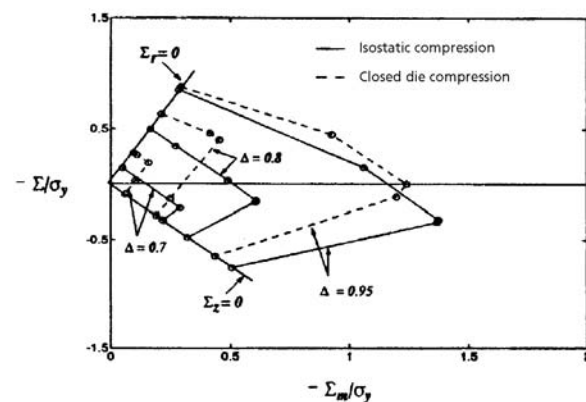


Figura 6. Loci de cedencia correspondientes a compresión isostática y en molde^[28].

Figure 6. Yield loci obtained by means of isostatic compression and die compression^[28].

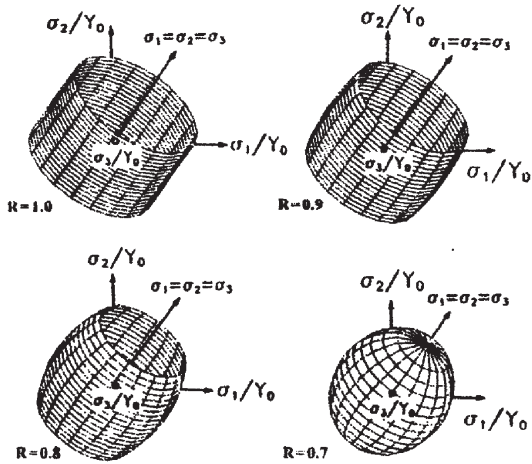


Figura 7. Superficie de cedencia calculada usando la ecuación. $AJ_{2D} + BJ_1^2 = Y_R^2 = hY_0^2$ (A , B y h dependen de la densidad del material; J_{2D} y J_1 son el segundo invariante del tensor desviador y el primer invariante del tensor esfuerzo.. Y_R y Y_0 son, respectivamente, los límites de cedencia del material con una densidad relativa R y el del material totalmente denso^[31].

Figure 7. Yield surfaces calculated using the following equation. $AJ_{2D} + BJ_1^2 = Y_R^2 = hY_0^2$ (A , B and h are parameters dependent on the density of the material; J_{2D} and J_1 are the second invariant of the deviatoric stress and the first invariant of the stress tensor, respectively; Y_R and Y_0 are the yield stress of the material with a relative density of R and the yield stress of bulk material, respectively^[31].

do^[33]. En la figura 8 se muestran las superficies de cedencia, en el espacio q - p , para el caso del modelo *CAM-clay* modificado.

Estos modelos son sustancialmente diferentes de las superficies cuadráticas y simétricas antes definidas.: toman en consideración la cohesión limitada entre partículas; por eso, la resistencia a tracción de estos materiales es mucho menor que a compresión. De estos modelos de plasticidad, el más utilizado en la actualidad es el Drucker-Prager/CAP. Este modelo es especialmente adecuado en la región de consolidación. Sin embargo, los autores de este trabajo tienen serias reservas sobre su validez en la región de dilatación.

Drucker-Prager^[34] propusieron un criterio de fallo que consistía en una línea recta, la línea de fallo, o la superficie de fallo (Fig. 9) en el espacio del primer y segundo invariantes del tensor esfuerzo (J_1 y J_{2D}). Los autores de este trabajo han comprobado que, la mayoría de los materiales muestran deformación plástica desde el inicio del proceso de carga (Fig.1). Durante el camino de carga, L - L' en la figura 9, el material fluye plásticamente de forma continua hasta el fallo, que se puede considerar como la última superficie de cedencia; además, durante la deformación, el material se endurece. Este comportamiento se puede repre-

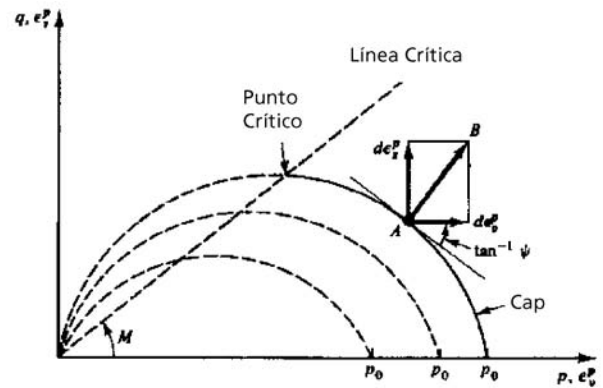


Figura 8. Modelo de plasticidad CAM-clay modificado^[32].

Figure 8. Modified CAM-clay Plasticity model^[32].

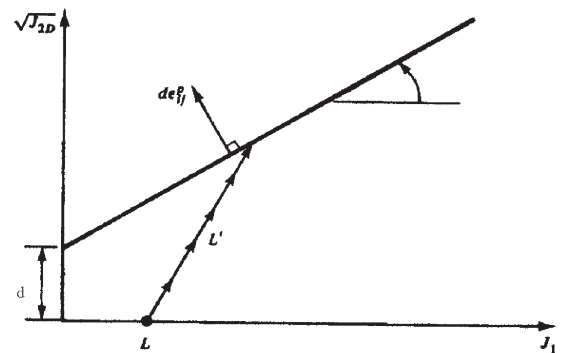


Figura 9. Criterio de Drucker-Prager. de_{ij}^p es un incremento de la deformación plástica; d y b son parámetros del material^[34]. La línea L - L' corresponde a un camino de carga.

Figure 9. Drucker-Prager criterion. de_{ij}^p is an increment of the plastic strain and d and b are parameters of the material^[34]. The line L - L' corresponds to a loading path.

sentar por medio de una serie de superficies de cedencia, *caps* de endurecimiento, previos al fallo^[35]. Este modelo se representa en la figura 10. Inicialmente, se supuso una forma circular para las *caps* aunque, realmente, dependen del material y deben ser determinadas experimentalmente. El modelo CAP, propuesto inicialmente para materiales geológicos, ha mostrado también un buen comportamiento en el caso de la compactación de polvo metálico

El modelo original^[36 y 37] usa dos superficies de cedencia: una superficie de fallo y un *cap* de cedencia a compresión. La superficie de fallo es perfectamente plástica, en el sentido que no hay endurecimiento mecánico, pero la fluencia, en ella, produce un aumento inelástico de volumen; en otras palabras, para los estados tensionales, en esta superficie, la muestra se dilata bajo un esfuerzo aplicado constante. La ecuación que describe la superficie de fallo es:

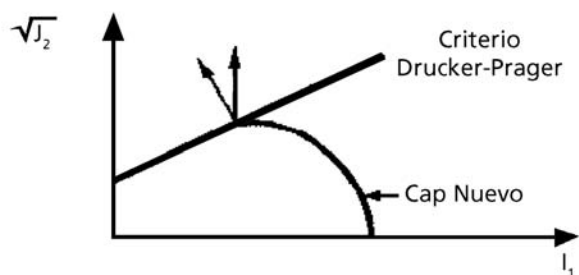


Figura 10. Comportamiento mecánico en el endurecimiento por deformación de materiales granulares^[34].

Figure 10. Mechanical behaviour of strain hardening granular materials^[34].

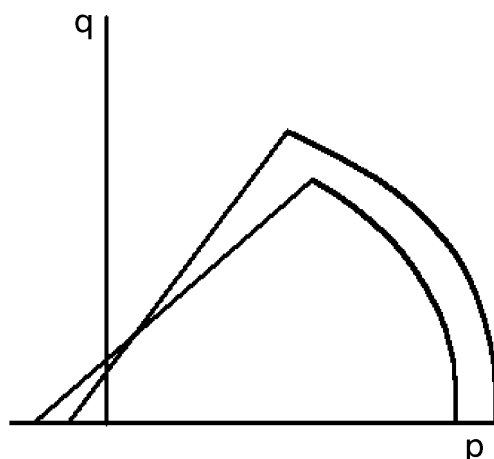


Figura 12. Evolución de la superficie de cedencia propuesta. (1) antes y (2) después de un ensayo de compresión.

Figure 12. Expected yield surfaces of a sample before (1) and after (2) an uniaxial compression test.

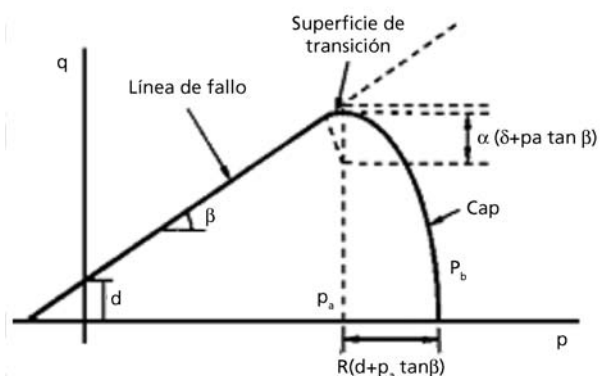


Figura 11. Superficies de cedencia para el Cap modificado en el espacio p - q ^[38].

Figure 11. Yield surfaces for the modified CAP model in the p - q space^[38].

$$f_1 = q - p \tan \beta - d = 0 \quad (1)$$

q y p son, respectivamente, los esfuerzos desviador y hidrostático; b es el ángulo de fricción, y d la cohesión del material. Según esta ecuación, la superficie de fallo es una línea recta en el espacio p - q .

El *cap* tiene forma elíptica en el espacio p - q y endurece (se expande) o ablanda (contrae) en función de la deformación plástica volumétrica: la compactación plástica volumétrica (fluencia en el *cap*) causa endurecimiento, mientras que la dilatación plástica volumétrica (fluencia en la superficie de fallo) causa ablandamiento. La ecuación que describe el *cap* es:

$$f_2 = [(p-p_a)^2 + (Rq)^2]^{1/2} - R(d+ p_a \tan \beta) \quad (2)$$

p_a es un parámetro de evolución relacionado con el límite de cedencia hidrostático a compresión, p_b representa el endurecimiento o ablandamiento volumé-

trico y R es un parámetro del material que controla la forma del *cap*. Todos estos aspectos se muestran en la figura 11.

Sin embargo, los resultados presentados en la figura 1 sugieren que se deben introducir un cierto número de modificaciones en este modelo para explicar el comportamiento experimental observado. Los sucesivos estados tensionales durante un ensayo de compresión se representan en el espacio p - q por una línea recta de pendiente 3 y que pasa por el origen. El hecho de que durante la compresión la muestra dilate significa que el camino de carga corta la línea de Drucker-Prager cuando el volumen comienza a aumentar pero, al contrario que en los materiales geológicos, la dilatación solo continúa si se aumenta la carga aplicada. Esto se refleja en la ecuación (1) por una disminución de la cohesión, d , y un aumento del ángulo de fricción, β . La dilatación tiene lugar mediante el aumento de la distancia entre los centros de partículas vecinas; esto, da lugar a un aumento de la fracción de volumen de porosidad y a una menor cohesión. El endurecimiento de las superficies en contacto entre partículas aumenta la fricción interna y, consecuentemente, el ángulo de fricción. El ensayo de compresión uniaxial no proporciona información sobre la evolución del *cap* durante este tipo de deformación, pero el hecho de que la partícula se ha endurecido debería producir una expansión del *cap*. La figura 12 muestra la evolución propuesta de la superficie de cedencia de una muestra antes y después de un ensayo de compresión uniaxial y detenido antes del fallo. La nueva superficie de cedencia se ha expandido, excepto en la cercanía del eje tensil p , a pesar del hecho de que la densidad de la muestra ha

disminuido; esta, es una diferencia importante respecto a los materiales geológicos. Este comportamiento particular se debe a la capacidad de endurecerse por deformación de las partículas metálicas. En los materiales geológicos, debido a la naturaleza cerámica de las partículas, el endurecimiento es debido solo a la disminución de volumen; en los polvos metálicos, la deformación plástica de las partículas tiene que considerarse como un nuevo mecanismo de endurecimiento. Por lo tanto, los parámetros p_a y β deben ser dependientes no solo de la densidad sino, también, del endurecimiento plástico de las partículas.

4. REFERENCIAS

- [1] A. ISTÚRIZ, M.D. RIERA Y J.M PRADO, *Rev. Met. Madrid* Vol. Extr. (2005) 181-186.
- [2] A. MEHTA, *Granular matter. An interdisciplinary approach*, Ed. Springer-Verlag, New York, EE.UU., 1994, pp. 44-49.
- [3] P. PORION, PhD Thesis, Université de Lille, 1994.
- [4] L. SMITH, *Met. Powder Rep.* 56 (2001) 32-35.
- [5] P.R. SEELING Y J WULFF, *Trans. AIME* 166 (1946) 492-500.
- [6] H.F FISCHMEISTER, E. ARZT Y L.R OLSSON, *Powder Metall.* 21 (1978) 178-186.
- [7] A. SCHOFIELD Y P. WROTH, *Critical State Soil Mechanics*, Ed. McGraw-Hill, London. U.K., 1968, pp. 124-132.
- [8] M. D. RIERA Y J. M. PRADO, *Proc. Powder Metallurgy World Congress & Exhibition*. CD-Document n° 615, 1998. .
- [9] P.MOSBAH, D. BOUVARD, J. LANIEL, E. OUEDRAOGO Y P.STUTZ, *Proc. Powder Metallurgy World Congress*, París, Francia, 1994, p. 677-682.
- [10] M. D. RIERA, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, 1999.
- [11] C.TORRE, *Berg Huttenmaenn. Jahrb. Montan. Hochsch. Leoben* 93 (1948) 62-69.
- [12] R.W.HECKEL, *Trans. AIME*. 221 (1961) 1001.
- [13] G.BOCKSTIEGEL, *Modern Developments in Powder Metallurgy*, Vol. 1, Ed. Plenum Press, New York, EE. UU., 1966, p. 155-167.
- [14] R.L.HEWITT, W. WALLACE Y M.C. DE MALHERBE, *Powder Metall.* 31 (1973) 88-106.
- [15] R.J.GREEN, *Int. J. Mech. Sci.* 14 (1972) 215-222.
- [16] A.L.GURSON, *J. Eng. Mater. Technol.* 99 (1977) 2-15.
- [17] B. SUNDSTRÖM Y H.F. FISCHMEISTER, *Modern Developments in Powder Metallurgy*, Vol. 6, Ed. Plenum Press, New York, EE.UU. 1974, pp. 203-215 .
- [18] H.L. MORRISON, O. RICHMOND Y M.L. DEVENPECK, *Int. J. Mech. Sci.* 16 (1974) 75-82.
- [19] A.K. KAKAR Y A.C.D. CCHAKLADER. *J. Appl. Phys.* 38 (1967) 3.223-3.285.
- [20] G.D. SCOTT, *Nature* 194 (1962) 956-968.
- [21] J. MASON Y J.D. BERNAL, *Nature* 188 (1960) 910-922.
- [22] E. ARZT, *Acta Metall.* 30 (1982) 1.883-1.894.
- [23] H.F. FISCHMEISTER Y E. ARZT, *Powder Metall.* 26 (1983) 82-88.
- [24] H.S. HELLE, K.E. EASTERLING Y M.F. ASHBY, *Acta Metall.* 33 (1985) 2.163-2.171.
- [25] R.M. McMEEKING. *Int. J. Mech. Sc.* 34 (1992) 53-62.
- [26] J. XU Y R.M. McMEEKING. *Int. J. Mech. Sci.* 34 (1992) 167-174.
- [27] N.A. FLECK, L.T. KUHN, Y R.M. McMEEKING. *J. Mech. Phys. Solids* 40 (1992) 1.139-1.151.
- [28] N. OGBONNA Y N.A. FLECO. *Acta Metall. Mater.* 43 (1995) 603-610.
- [29] O. MOLERUS. *Powder Technol.* 12 (1975) 259-275.
- [30] S.M. DORAIVELU, H.L. GEGEL, J.S. GUNASEKERA, J.C. MALAS, J.T. MORGAN Y J.F. THOMAS JR., *Int. J. Mech. Sc.* 26 (1984) 527-548.
- [31] D.N. LEE Y H.S. KIM, *Powder Metall.* 35 (1992) 84-92.
- [32] K.H. ROSCOE, A.N. SCHOFIELD Y C.P. WROTH, *Géotechnique* 8 (1958) 22-53.
- [33] C.S. DESAI Y H.J. SIRIWARDANE, *Constitutive Laws for Engineering Materials with emphasis on Geologic Materials*, Ed. Prentice Hall, Inc. N.J., EE.UU., 1984, p. 204.
- [34] D.C. DRUCKER Y W. PRAGER, *Q. Appl. Math.* 10 (1952) 157-175.
- [35] D.C. DRUCKER, R.E. GIBSON Y D.J. HENKEL, *Proc. ASCE*. 81 (1955) 81-96.
- [36] I. SANDLER, F.L. DIMAGGIO Y Y. BALADI, *J. Geotech. Eng. Div.* 102 (1976) 683-699.
- [37] HIBBITT, KARLSSON Y SORENSEN, Inc. *ABAQUS, Theory Manual, Version 5.7*, 1997, pp. 330-352.