

Muestreo de minerales: análisis de sensibilidad y factores de corrección para la ecuación de Pierre Gy^(*)

G. Vallebuona* y F. Niedbalski*

Resumen

La ecuación de Pierre Gy es la más utilizada en el muestreo de minerales. Esta ecuación está basada en cuatro parámetros: factor de forma, factor de granulometría, factor de mineralogía y factor de liberación. La práctica usual es considerar valores fijos para los factores de forma y granulometría, dejando fuera a una gama importante de minerales que no son bien representados por dichos valores. Con respecto al factor de mineralogía, se consideran, solamente, una especie mineralógica de interés y la ganga, no considerando otros casos, como los minerales polimetálicos donde hay más de una especie de interés. En este trabajo se sensibilizó la ecuación de Gy con respecto a sus factores y se han desarrollado algunos procedimientos para determinar valores específicos para éstos. Se han determinado las características principales de los minerales asociadas con un uso inseguro del procedimiento utilizado actualmente. Finalmente, para un caso en estudio, se evaluó el efecto de utilizar una u otra alternativa.

Palabras clave

Muestreo. Minerales. Factor de liberación. Factor de forma. Granulometría.

Minerals sampling: sensibility analysis and correction factors for Pierre Gy's equation

Abstract

Pierre Gy's equation is widely used in ore sampling. This equation is based in four parameters: shape factor, size distribution factor, mineralogical factor and liberation factor. The usual practice is to consider fixed values for the shape and size distribution factors. This practice does not represent well several important ores. The mineralogical factor considers only one specie of interest and the gangue, leaving out other cases such as polymetallic ores where there are more than one specie of interest. A sensibility analysis to the Gy's equation factors was done and a procedure to determine specific values for them was developed and presented in this work. Mean ore characteristics, associated with an insecure use of the actual procedure, were determined. Finally, for a case study, the effects of using each alternative were evaluated.

Keywords

Sampling. Minerals. Liberation factor. Shape factor. Size distribution.

1. INTRODUCCIÓN

Debido a consideraciones prácticas y económicas, para caracterizar un lote de material particulado se extrae una porción de éste, denominada muestra. Al respecto, surgen varias interrogantes, como, por ejemplo, el tamaño de muestra requerido de modo que represente al total o las acciones posibles de realizar sobre el lote, de modo que mejore la representatividad y la manera correcta de ejecutar la acción. La responsabilidad que recae sobre esta fracción, en general pequeña respecto al total, es muy

grande, especialmente en el caso de la industria minera, donde casi la totalidad de las etapas y operaciones involucran la toma de muestras. Decisiones importantes como, por ejemplo, la de invertir en la explotación de un yacimiento y la de decidir el destino de un bloque de mineral, y determinaciones importantes, como la ley y humedad de un concentrado, están basadas en resultados de la acción antes mencionada. Más aún, resulta frecuente observar diferencias entre tonelajes indicados por estudios geoestadísticos y los posteriormente extraídos, leyes indicadas por la mina y las determinadas

(*) Trabajo recibido el día 9 de julio de 2004 y aceptado en su forma final el día 7 de octubre de 2004.

(*) Departamento de Ingeniería Civil de Minas, Universidad de Chile, Av. Tupper 2069, Santiago - Chile. Fono (56) (2) 6710638, Fax: (56) (2) 6723504. E-mail: gvallebu@ing.uchile.cl

en la planta, e incluso las leyes de un concentrado varían al ser determinadas por el productor o por el comprador. Todo lo anterior es atribuible, en gran parte, a un inadecuado procedimiento de muestreo.

Numerosos autores han abordado el problema^[1 y 2], y, en la actualidad, se acepta como válida la teoría de muestreo de materiales de Pierre Gy. En ella, se distinguen las distintas clases de error, como son los de segregación, delimitación, extracción y preparación, y se indica la manera de anularlos o minimizarlos, como asimismo se demuestra que existe una fuente de error denominada heterogeneidad de constitución, la que en general es imposible de anular, dando origen al denominado error fundamental. A pesar de la imposibilidad de eliminación del error fundamental, Gy^[1 y 2] desarrolla una expresión que permite dimensionarlo y minimizarlo. La expresión, ampliamente utilizada, es conocida como ecuación de Pierre Gy^[1 y 2], y se muestra a continuación:

$$S_{FE}^2 = \left[\frac{1}{M_s} - \frac{1}{M_L} \right] f g c l d^3 \quad (1)$$

En esta ecuación, S_{FE}^2 es la varianza del error fundamental, M_s y M_L son la masa de la muestra y del lote, respectivamente, en gramos; d es el tamaño bajo el cual está el 95 % del lote (cm); f , g , l y c son los factores de forma, distribución de tamaños, liberación y composición mineralógica (g/cm³), respectivamente. El producto de estos factores (f , g , c , l) se denomina constante de muestreo y se representa con la letra C .

En la expresión, la variable S corresponde a la desviación estándar del error fundamental, y minimizarla implica aumentar la probabilidad de que la muestra presente un valor cercano de la propiedad en estudio (en general, ley de algún metal) del lote del cual proviene. El autor deduce la anterior ecuación de su teoría, en base a una serie de suposiciones y simplificaciones. Respecto a estas últimas, propone utilizar valores fijos para el factor de forma ($f=0,5$) y el factor de granulometría ($g=0,25$), aunque estos parámetros tienen asociadas ecuaciones para su determinación^[1 y 2]. La ecuación es bastante útil para diseñar protocolos de muestreo, pero requiere modificaciones para que su uso sea extensivo a minerales que no están bien representados. Los parámetros que el autor propone utilizar como fijos tienen una interpretación física que no concuerda con una amplia gama de minerales. Por

ejemplo, minerales aciculares presentan factores de forma mayores que uno, lo cual significa una subestimación del error fundamental^[2 y 3]. Lo mismo ocurre en el caso del factor de granulometría, donde se observa que los valores reales se encuentran entre 0,17 y 0,4^[1].

Respecto al factor de mineralogía (c), éste considera la existencia de sólo una especie de interés y ganga, dejando fuera del análisis a minerales que presenten más de una especie de interés (por ejemplo, mineral de cobre compuesto de calcosina y covelina) y ganga. La expresión que define a este factor es la siguiente:

$$c = \frac{(1 - a_L)}{a_L} \left((1 - a_L) \lambda_c + a_L \lambda_g \right) \quad (2)$$

donde a_L es la ley media del lote y λ_c y λ_g corresponden a las densidades de la especie de interés y la de la ganga, respectivamente, en g/cm³.

Por último, el factor de liberación tiene dos expresiones, ninguna de éstas desarrolladas por Gy^[2], la primera de las cuales es muy conocida por los ingenieros de procesos^[2]:

$$l = \left(\frac{d_l}{d} \right)^b \quad (3)$$

$$l = \frac{a_{max} - a_L}{1 - a_{max}} \quad (4)$$

donde la variable d_l , de la primera expresión, corresponde al diámetro de liberación de la especie de interés y b es un parámetro por determinar que depende del mineral y, generalmente, se usa el de valor 0,5^[1, 2 y 4]. La segunda expresión está basada en la heterogeneidad del lote^[2] donde la variable a_{max} corresponde a la ley máxima del lote. En este caso surge la problemática no resuelta de determinarla.

El presente trabajo considera realizar un análisis de sensibilidad de la ecuación de Pierre Gy respecto de sus parámetros, determinando cuán influyentes son las aproximaciones en el resultado y plantear modificaciones a los valores y expresiones de estimación de tales parámetros, de modo de no incurrir en simplificaciones que se demuestren inexactas de acuerdo al estudio. Además, se presentan ejemplos de la cuantificación del error fundamental con los actuales parámetros de la ecuación y con los ajustes propuestos en este trabajo.

2. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

En este apartado se analiza la sensibilidad de la ecuación de Pierre Gy a variaciones en sus factores. La ecuación es lineal en sus cuatro factores principales (f , g , c y l), razón por la cual su derivada respecto a cualquiera de ellos es constante.

Para los desarrollos siguientes se asumirá que la masa del lote es mucho mayor que la de la muestra, situación que es usual en la industria minera.

Una manera de expresar el error en que se incurre al utilizar una aproximación es definiéndolo como una fracción de tal estimación. En este caso para determinar el error en que se incurre al utilizar los parámetros en los valores establecidos por P. Gy, se define éste en términos de la varianza o de la desviación estándar como sigue:

$$E = \frac{S_{FE,E}^2 - S_{FE,R}^2}{S_{FE,E}^2} \quad e = \frac{S_{FE,E} - S_{FE,R}}{S_{FE,E}} \quad (5)$$

donde:

- E = error en términos de la varianza.
- e = error en términos de la desviación estándar.
- $S_{FE,E}^2$ = varianza estimada del error fundamental, calculada con los parámetros establecidos por P. Gy.
- $S_{FE,R}^2$ = varianza real del error fundamental, calculada con los parámetros reales.
- $S_{FE,E}$ = desviación estándar estimada del error fundamental, calculada con los parámetros establecidos por P. Gy.
- $S_{FE,R}$ = desviación estándar real del error fundamental, calculada con los parámetros reales.

Definiendo así el error se tiene que la varianza real y la desviación estándar real corresponderán a una corrección de la varianza estimada, lo que se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} S_{FE,R}^2 &= (1-E)S_{FE,E}^2 \\ S_{FE,R} &= (1-e)S_{FE,E} \end{aligned} \quad (6)$$

2.1. Factor de forma

Utilizando la ecuación de Pierre Gy, bajo el supuesto de que la masa del lote es mucho mayor a la de la muestra, se puede expresar la varianza real

y la estimada en función del factor de forma estimado (f_E) y el factor de forma real (f_R) respectivamente, como se muestra en las ecuaciones 7:

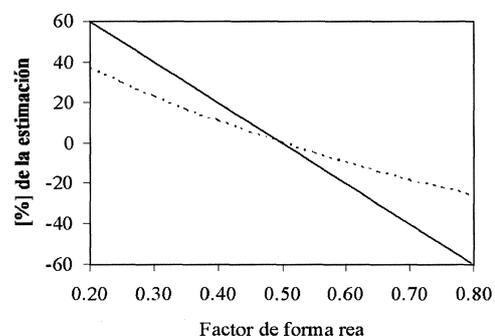
$$\begin{aligned} S_{FE,E}^2 &= \frac{f_E g c l d^3}{M_s} \\ S_{FE,R}^2 &= \frac{f_R g c l d^3}{M_s} \end{aligned} \quad (7)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la definición del error (Ec. 5), y considerando que, usualmente, se estima el valor del factor de forma en 0,5, se tienen las siguientes expresiones que explicitan el error en que se incurre debido a tal aproximación:

$$\begin{aligned} E_f &= 1 - \frac{f_R}{0,5} \\ e_f &= 1 - \frac{\sqrt{f_R}}{\sqrt{0,5}} \end{aligned} \quad (8)$$

donde E_f y e_f corresponden a los errores en términos de la varianza y de la desviación estándar, respectivamente, debido a una estimación del factor de forma.

En la figura 1 se muestra el error debido a la estimación del valor del factor de forma en 0,5, para distintos valores reales del mismo. Como puede apreciarse, se tiene que para valores reales menores a 0,5, la situación es favorable. En caso contrario la situación es desfavorable, la cual debiera corregirse incrementando la masa de la muestra. Basta que el valor real del factor de forma sea igual a 0,61 para que el error, en términos de desviación estándar, sea de un 10 %, lo cual significa, por ejemplo, que el valor real de la desviación estándar del error fundamental en un muestreo que se estimó en 5 %,



— Error en términos de varianza ···· Error en términos de desv. est

Figura 1. Error debido a estimación del factor de forma.

Figure 1. Error due to shape factor estimation.

sea 5,5 %. Una diferencia de esta magnitud puede ser excesiva para el muestreo de minerales de cobre, donde es aceptable, en un protocolo de muestreo, un error total hasta del 5 %.

2.2. Factor de distribución de tamaños

Las expresiones de las varianzas real y estimada (Ec. 7) son semejantes a la presentada para el caso del factor de forma. En este caso se consideran g_E y g_R como factores de distribución de tamaños estimado y real, respectivamente. Considerando lo antes mencionado y que, usualmente, se estima el valor del factor de distribución de tamaños en 0,25, se tienen las siguientes expresiones para el error en que se incurre debido a tal aproximación:

$$E_g = 1 - \frac{g_R}{0.25} \quad e_g = 1 - \frac{\sqrt{g_R}}{\sqrt{0.25}} \quad (9)$$

donde E_g y e_g corresponden a los errores en términos de la varianza y de la desviación estándar, respectivamente, debido a una estimación del factor de distribución de tamaños.

En la figura 2 se muestran estos errores para distintos valores reales del mismo.

Como se aprecia, a un valor real del factor de distribución de tamaños mayor que 0,25 la situación es desfavorable, lo que significa que la masa de la muestra está subestimada. Para valores menores a éste, la situación es favorable. Por ejemplo, con un valor real del factor de distribución de tamaños igual a 0,3 se tiene un error en términos de desviación estándar de un 10 %.

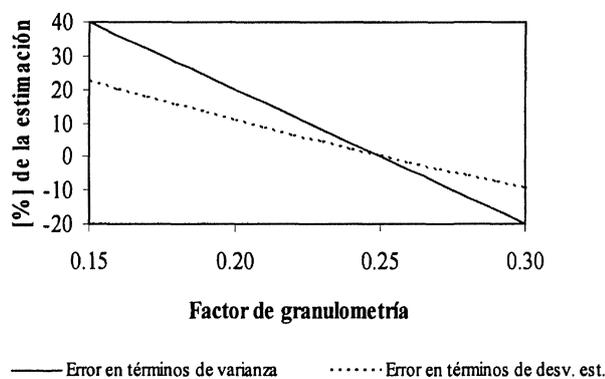


Figura 2. Error debido a estimación del factor de distribución de tamaños.

Figure 2. Error due to size distribution factor estimation.

Rev. Metal. Madrid 41 (2005) 28-37

2.3. Factor de composición mineralógica

Para el factor de composición mineralógica, c , hay que considerar dos situaciones: la primera, cuando la ley del componente crítico en el lote es muy alta (concentrados) y la segunda cuando el componente crítico se presenta en pequeñas cantidades (ley inferior al 5%, por ejemplo, voladuras, residuos, etc.). Para estas situaciones, la ecuación (2) se utiliza simplificada^[1 y 2]. Para el primer caso, en que la ley del componente crítico en el lote es muy alta (concentrados), la expresión utilizada es:

$$c = (1 - a_L)\lambda_g \quad (10)$$

En este caso, para combinaciones típicas de ley de mineral de interés y densidad de la ganga que se presenta en los concentrados, el factor c varía en forma decreciente con el aumento de la ley, lo que concuerda con el concepto de heterogeneidad de constitución. Por ejemplo, para un 99 % y 90 % de la ley del mineral de interés con una densidad de la ganga constante de 2,75 g/cm³, los factores de composición mineralógica serían de 0,028 y 0,275 g/cm³, respectivamente. Por otro lado, este factor es creciente con el aumento de la densidad de la ganga. Por ejemplo, para una ley del mineral constante de 90 % y densidades de la ganga de 2,5 y 3 g/cm³, los factores de composición mineralógica serían de 0,25 y 0,30 g/cm³, respectivamente. De lo anterior, se observa que este factor es más sensible a variaciones en la ley que en la densidad.

En general, para un concentrado, a mayor ley del mineral de interés, mayor sensibilidad del factor de composición mineralógica frente a una determinación de la composición. Dado que una sobrestimación de la ley genera una subestimación del factor, resultará conveniente acotarla superiormente, a través de la elección de un factor estequiométrico conservador. Por ejemplo, para el caso de la calcopirita, el suponer que el porcentaje de cobre es de un 34,64 % evitaría la posible subestimación del valor c del factor como se muestra en la figura 3.

Para el segundo caso, cuando el componente crítico se presenta en pequeñas cantidades, la expresión utilizada es:

$$c = \frac{\lambda_c}{a_L} \quad (11)$$

En este caso sucede lo mismo que en el caso de los concentrados, una sobrestimación de la ley del

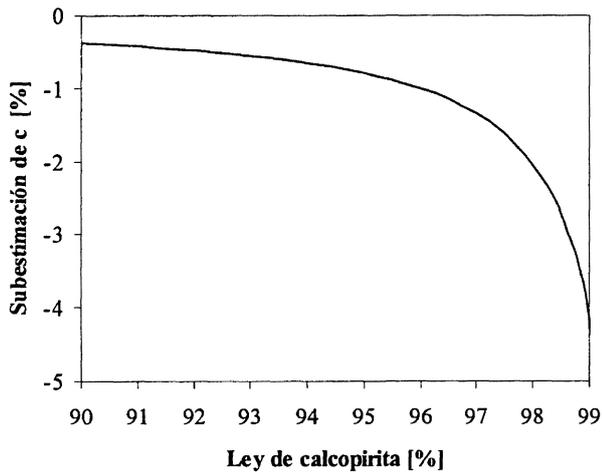


Figura 3. Subestimación del factor de composición mineralógica para el caso de un concentrado de calcopirita.

Figure 3. Subestimation of the mineralogical composition factor for chalcopyrite concentrate.

mineral dará lugar a una subestimación del factor c y tal subestimación será mayor en la medida que la densidad del mineral aumente. En este caso, el factor es más sensible a variaciones en la ley del mineral de interés. A menor ley, su sensibilidad es mayor.

2.4. Factor de liberación

Al igual que para el caso del factor de composición mineralógica, no existe un valor predeterminado a utilizar. Las expresiones para el error en que se incurre al aproximar el factor de liberación, en términos de varianza y en términos de desviación estándar, son, respectivamente, las siguientes:

$$E_l = 1 - \frac{l_R}{l_E} \quad e_l = 1 - \sqrt{\frac{l_R}{l_E}} \quad (12)$$

donde l_R y l_E corresponden a los factores de liberación real y estimado, respectivamente.

En las expresiones anteriores se observa que, si el verdadero valor del factor de liberación es mayor al estimado, ambos errores son negativos, lo cual significa que la varianza del error fundamental es mayor a la estimada.

La expresión más utilizada, que permite estimar el factor de liberación es la siguiente:

$$l = 1 \quad \text{si} \quad d \leq d_l$$

$$l = \sqrt{\frac{d_l}{d}} \quad \text{si} \quad d > d_l \quad (13)$$

En la expresión anterior, d_l o tamaño de liberación, corresponde al que asegura la liberación del componente de interés, el cual debe determinarse a través de análisis microscópico. Por su parte, d , corresponde al tamaño máximo de partícula, el cual corresponde al tamaño de malla que retiene el 5 % del material.

En el cálculo del factor de liberación resulta inconveniente subestimar el tamaño de liberación y/o sobrestimar el tamaño de partículas. El error en que se incurre al realizar una estimación incorrecta del valor del factor de liberación se puede representar por el valor del factor de liberación estimado como una fracción del real, como se muestra en la figura 4. Para valores inferiores a la unidad, el valor del factor se ha subestimado. Por el contrario, para valores superiores, se ha sobrestimado. Por ejemplo, si el valor estimado del factor es un 90 % del real, la varianza del error fundamental estará subestimada en un 11 %, o, lo que es igual, su desviación estándar en un 5 %.

3. ANÁLISIS DE LOS FACTORES

3.1. Metodología

Se determina el factor de forma por tamaño para tres muestras de mineral distintas, dos de litologías puras (pórfidos y brecha turmalina), y una muestra de mineral (Santo Domingo), todas ellas con especies de cobre. Los tamaños de partícula considerados se ubicaron en el rango que va de los 10 cm a la malla 20 ASTM (850 μm). Para la determinación del factor de forma se utiliza la siguiente ecuación^[1 y 2]:

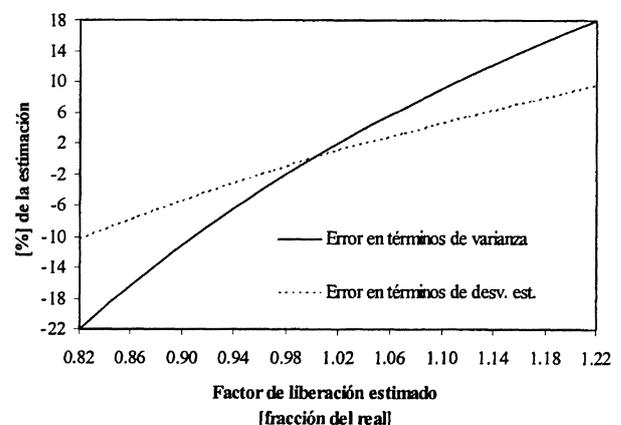


Figura 4. Error debido a la estimación del factor de liberación.

Figure 4. Error due to liberation factor estimation.

$$f = \frac{M}{\rho d^3 N} \quad (14)$$

donde, M es la masa de N partículas, en gramos; d es el tamaño medio y corresponde a la media geométrica de la abertura de las mallas consecutivas de la clase, en centímetros, y ρ es la densidad del mineral, en g/cm^3 .

Se realiza un análisis granulométrico a los tres minerales y se determina el factor de forma por clase de tamaño. En la tabla I se presenta el valor promedio del factor de forma para cada mineral.

Para la determinación del factor de granulometría se utiliza la siguiente expresión de cálculo dada por P. Gy [1 y 2]:

$$g = \frac{\sum_i \frac{M_i}{M_L} d_i^3}{d^3} \quad (15)$$

donde, M_L , es la masa en gramos del conjunto de mineral; M_i , es la masa en gramos de un rango granulométrico; d_i , es el diámetro medio, en centímetros, para un rango granulométrico y d es el diámetro medio, en centímetros, para el conjunto del mineral. La determinación del factor g se realiza para 17 granulometrías gruesas (productos de triturado terciario de diferentes minerales) y para 20 granulometrías finas (minerales de alimentación de flotación, concentrados y residuos de flotación).

3.2. Análisis

3.2.1. Factor de forma

Según Pierre Gy, independientemente del tamaño de partícula, el valor del factor de forma se desvía levemente de 0,5. Como se muestra en la tabla I los valores de f son superiores a 0,5, propuesto por el autor, de modo que la varianza del error fundamental será mayor a la estimada al utilizarlo. En caso de utilizar la ecuación de Pierre Gy con fines de determinar la masa de muestra requerida, ésta, se subestimará, requiriéndose más muestra como también se muestra en la tabla I y, en caso de utilizarla con fines de determinar el nivel de confianza en un proceso de muestreo, éste se sobrestimarán.

3.2.2. Factor de distribución de tamaños

Con los valores del factor de distribución de tamaño determinados a partir de la ecuación (15), se

Tabla I. Factores de forma (f) y muestra requerida

Table I. Shape factor (f) and the required sample

Litología	f promedio	Muestra requerida [%] de la estimada
Pórfidos	0,56	112
Brecha turmalina	0,57	114
Mineral S.D.	0,61	123

representa g para distintas definiciones del tamaño máximo, (d), considerando cada distribución granulométrica utilizada en este estudio (Fig. 5). Los promedios de los valores de g obtenidos, para d_{95} , son inferiores a 0,25, lo cual significa una sobrestimación de la varianza del error fundamental. En el caso de las granulometrías gruesas, el valor máximo, (0,33,) es más lejano al valor 0,25 que el máximo observado para las finas (0,28).

Actualmente, se propone utilizar, como tamaño máximo de partícula, el que retiene el 5 del

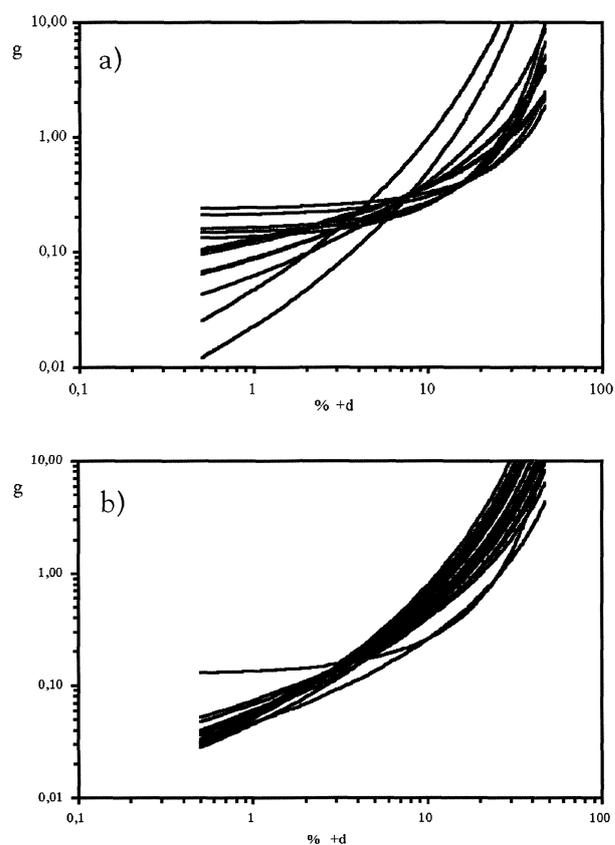


Figura 5. Factor de distribución de tamaños versus definición del tamaño para a) granulometrías gruesas y b) granulometrías finas.

Figure 5. Size distribution factor vs. maximum size definition for a) coarse granulometric distributions and b) fine granulometric distributions.

material del lote. Según Gy, esto, se debe a que al definirlo así, los valores que se presentan para el factor de distribución de tamaños son muy cercanos entre ellos y, en torno, al valor 0,25. Como una forma de cuantificar el grado de intersección de las curvas, la figura 6 muestra el coeficiente de variación entre los valores del factor de distribución de tamaños para distintas definiciones de tamaño máximo, definiéndolo como la razón entre desviación estándar de g y el promedio de los valores de g , para cada una de las granulometrías del estudio. Para el caso de granulometrías gruesas, se observa la presencia de un mínimo para un tamaño levemente superior al que retiene el 5% del material, d_{95} . Para el caso de las finas, el mínimo se logra para un tamaño que retiene sólo el 3% (d_{97}).

Para el caso de las granulometrías gruesas, el promedio de los valores del factor de distribución de tamaños, para una malla que retenga el 5% del material, resulta ser 0,23. Por su parte, para las finas, resulta ser 0,22. Pero en el caso que para estas últimas se defina el tamaño máximo como el que retiene el 3% del material, el promedio resultó ser 0,14. La tabla II muestra las recomendaciones finales para la definición de tamaño máximo y valor a utilizar para el factor. Para el caso de granulometrías gruesas se opta por mantener la definición del tamaño máximo, d_{95} , pero aumentar el valor del factor a 0,27. Para el caso de granulometrías finas se opta por definir el tamaño máximo como el que retiene el 3% del material, d_{97} , y utilizar para el factor un valor de 0,15. El criterio para determinar el valor final de g , en cada caso, se basa en que la muestra no esté subdimensionada y que no caiga en sobreestimaciones excesivas, considerando el promedio de los errores y la desviación estándar. Se observa que, para ambos tipos de

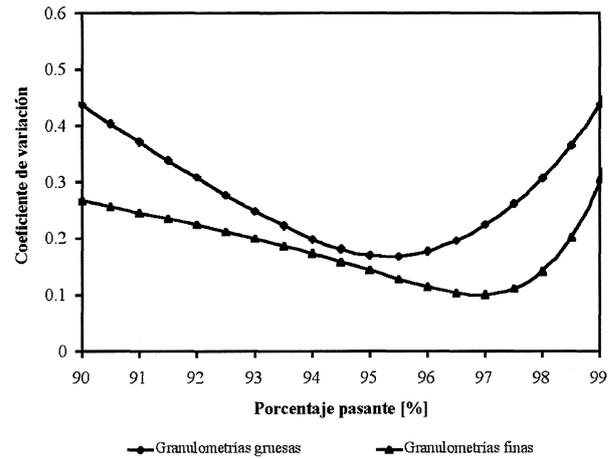


Figura 6. Coeficiente de variación de los valores obtenidos para el factor de distribución de tamaños versus definición de tamaño máximo del lote.

Figure 6. Variation coefficient for size distribution factors vs. lot maximum size definition.

granulometría, el resultado de la suma del tamaño promedio de muestra requerido y su desviación estándar es de 100, lo que asegura no subdimensionar el tamaño de muestra.

3.2.3. Factor de composición mineralógica

Este factor es, claramente, el más variable de los que componen la ecuación de Pierre Gy, y su valor debe estimarse con la mayor exactitud posible. Su definición adolece de un problema, consistente en que su expresión de cálculo incorpora la propiedad que se desea determinar a través de ella, ésto es, la ley media del componente de interés. Por lo tanto, se recomienda no sobrestimarla.

Tabla II. Recomendaciones para el factor de distribución de tamaños

Table II. Recommendations for the size distribution factor

Granulometrías	Ejemplos	Definición de tamaño máximo del lote	Valor recomendado para g	Tamaño promedio de muestra requerido [% del estimado]	Desv. estándar [% del estimado]
Gruesas	Productos voladura y triturado	d_{95}	0,27	84	16
Finas	Alimentación a flotación y concentrados	d_{97}	0,15	91	9

La situación en presencia de un polimetálico, por ejemplo cobre y oro, estará cubierta por la teoría de P. Gy, si el muestreo se realiza considerando la especie más heterogénea, en este caso el oro, lo que asegurará un muestreo correcto del resto de ellas. La heterogeneidad relativa de cada especie está dada por el producto de los factores de composición mineralógica y de liberación, de modo que la que presente un mayor producto de ambos será la más heterogénea. Existe, sin embargo, una situación muy típica en la industria minera y que no está cubierta por esta teoría y corresponde al caso en que se está en presencia de varias especies mineralógicas que contienen un mismo metal de interés. Un ejemplo de esta situación es el de un concentrado de cobre que presente calcopirita, calcosina, covelina y bornita.

Si hay más de una especie que contiene el metal de interés por el que se muestrearán, por ejemplo, para el caso de dos especies (1 y 2), la varianza correspondiente al total del metal Me_T , presente en la muestra, se puede expresar de la siguiente manera:

$$\sigma^2(Me_T) \leq \left(\sqrt{e_1^2 a_1^2 \sigma_1^2} + \sqrt{e_2^2 a_2^2 \sigma_2^2} \right)^2 \quad (16)$$

En la expresión anterior, e_i corresponde al factor estequiométrico del metal o elemento de interés en la especie mineralógica i y a_i es la ley media de la especie mineralógica i . La varianza σ_i^2 , corresponde a la varianza del error fundamental en el muestreo de la especie i , que se determina con la ecuación de P. Gy, mediante la siguiente expresión:

$$\sigma_i^2 = \frac{f g c_i l_i d^3}{M_s} \quad (17)$$

donde,

- M_s = masa de la muestra, g.
- l_i = factor de liberación de la especie i .
- c_i = factor de composición mineralógica de la especie i .

Reemplazando ambas expresiones, en la ecuación varianza del metal total presente en la muestra y considerando la varianza en términos relativos, tal como se acostumbra en la teoría, y que ésta es menor a cierta tolerancia (σ^2), se llega a la ecuación:

$$\sigma^2 \geq \frac{f g \left(\frac{e_1 a_1 \sqrt{c_1 l_1} + e_2 a_2 \sqrt{c_2 l_2}}{e_1 a_1 + e_2 a_2} \right)^2 d^3}{M_s} \quad (18)$$

En forma genérica, para N especies de interés que contengan el metal (o elemento) por el cual se muestrearán, la ecuación sería la siguiente:

$$\sigma^2 \geq f g \frac{d^3}{M_s} \left(\frac{\sum_{i=1}^n e_i a_i \sqrt{c_i l_i}}{\sum_{i=1}^n e_i a_i} \right)^2 \quad (19)$$

Esta expresión acota el error de muestreo debido a la heterogeneidad de constitución cuando se está en presencia de varios minerales que contienen un mismo elemento de interés. El factor que multiplica a los factores $f, g, d^3/M_s$ se denomina CL y reúne los factores de composición mineralógica (c_i) y liberación (l_i) de cada especie (i), calculados de manera habitual, para cada una de ellas por separado. Además, contiene en su expresión, a la ley media de la especie mineralógica i , (a_i) y al factor estequiométrico del elemento de interés en la especie i (e_i).

3.2.4. Factor de liberación

En el cálculo del factor de liberación intervienen, por un lado, el tamaño máximo del lote, d_{95} , y, por otro, el tamaño de liberación de la especie de interés, d_l . La determinación del primero de ellos es directa, por ejemplo, a través de un análisis granulométrico. En la figura 7 se presenta el factor de liberación en función del tamaño máximo para distintos tamaños de liberación. Si se analiza, a mayor tamaño máximo, menor sensibilidad del valor del factor en su determinación, mientras que a menor tamaño máximo, la sensibilidad es mayor. Lo anterior significa que en el caso de las granulometrías finas (por ejemplo, inferiores a 1 cm) resulta importante realizar un análisis granulométrico para determinar el tamaño máximo. Se observa, además, que a menor tamaño máximo, mayor sensibilidad del valor del factor al tamaño de liberación de la especie de interés, y que una subestimación de este último generará una subestimación del valor del factor, situación que resulta inconveniente.

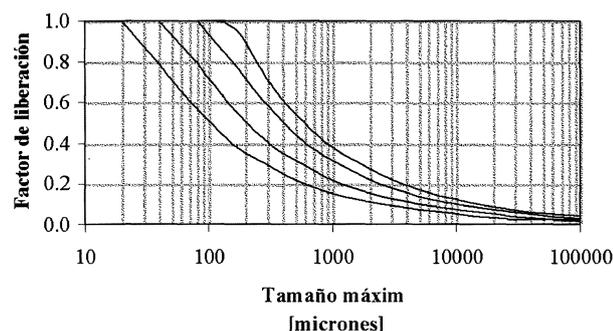


Figura 7. Factor de liberación en función del tamaño máximo (d_{95}) para distintos tamaños de liberación.

Figure 7. Liberation factor vs. maximum size (d_{95}) for different liberation sizes.

3.3. Ejemplo de aplicación

En este apartado se considera un ejemplo de aplicación en el que se determina la diferencia entre los resultados obtenidos al utilizar la ecuación de P. Gy con sus factores y la ecuación modificada, propuesta en este trabajo. Para esto, se calcula el tamaño de la muestra requerida, para determinar la ley de cobre de un producto de triturado terciario ($d_{95} = 1,12$ cm) de la planta concentradora de la División Andina de Codelco Chile. Se considera un error de estimación no superior al 1%. El cobre se presenta, principalmente, en calcopirita y en cantidades menores en calcosina, con leyes de 3,2 % y 0,3 % y tamaños de liberación 100 y 75 mm, respectivamente. En la tabla III se muestran los factores utilizados para el cálculo de la muestra requerida, (M_S), y el valor obtenido de ésta utilizando la ecuación de P. Gy y la ecuación propuesta en este trabajo. Los factores f y g utilizados en la ecuación de P. Gy son los sugeridos por él y los factores c y l , se obtienen de las expresiones (11) y (3), respectivamente. Para la ecuación modificada, los factores f y g son los recomendados por los autores de este trabajo y el parámetro CL se calcula con el término entre paréntesis elevado al cuadrado, que se presenta en la ecuación (19). La gran diferencia obtenida a través de ambas soluciones, 92 k en el primer caso y 243 k en el segundo, se explica por el alto contenido de cobre en la calcosina, aunque sea menos abundante.

4. CONCLUSIONES

El análisis de sensibilidad de los factores que componen la ecuación de muestreo de Pierre Gy indi-

Tabla III. Determinación de la muestra con la ecuación de P. Gy y la ecuación modificada

Table III. Sampling determination with P. Gy's equation and modified equation

Factores	P. Gy	Ecuación modificada
f	0,5	0,6
g	0,25	0,27
c [g/cm ³]	131,3	-
l	0,1	-
CL [g/cm ³]	-	26,7
M_S [k]	92	243

ca que el factor de composición mineralógica es el más variable de los cuatro que componen la ecuación, por lo que debe enfatizarse su determinación correcta. Por otra parte, el factor de liberación es el de interpretación más abstracta y los factores de forma y distribución de tamaños, a pesar de ser los más estables, requieren de nuevos valores.

La ecuación de Pierre Gy puede ser modificada de tal manera que se pueden incluir situaciones que no estaban representadas por ella. La nueva ecuación tiene, básicamente, la misma forma. A diferencia con la del autor, se propone lo siguiente:

- Utilizar, para el factor f , el valor 0,6.
- Diferenciar entre granulometrías gruesas y finas. Para las primeras, conviene utilizar para el factor g el valor 0,27 y para el tamaño el d_{95} , para las segundas el valor 0,15 para g y para el tamaño el d_{97} .
- Considerar el nuevo factor CL , que une los factores de composición mineralógica y de liberación y permite la posibilidad de considerar la existencia de más de una especie que contenga al elemento de interés. Este nuevo parámetro, (CL), es función del factor estequiométrico del metal (o elemento) de interés en la especie mineralógica i , de la ley media de la especie mineralógica i en el lote, del factor de composición mineralógica y del factor de liberación para la especie i , ambos calculados de la forma tradicional.
- Cabe observar que, en el caso de que la especie de interés sea sólo una, la expresión perfeccionada toma la misma forma que la ecuación de Pierre Gy original, pero deben seguirse las recomendaciones respecto de los valores que deben tomar sus factores. La ecuación de muestreo de P. Gy sin modificaciones subestima la muestra que se requiere.

REFERENCIAS

- [1] P. GY, *Sampling of Particulate Materials*, Elsevier Scientific, 2da. Ed, Amsterdam, Holland, 1982, pp. 1-431.
- [2] F. PITARD, PIERRE GY'S, *Sampling Theory and Sampling Practice*, CRC Press, 2da. Ed., Boca Raton, USA, 1993, pp.1-477.
- [3] E. KELLY Y D. SPOTTISWOOD, *Introduction to Mineral Processing*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1982, pp. 1-474.
- [4] F. BONGARCON Y P. GY, *Rev. Miner.* 54 (1999) 19-22.