

Obtención de la tenacidad de fractura dinámica de iniciación de materiales elásticos y lineales^(*)

José Fernández-Sáez*, Lourdes Rubio*, Susana de Luna*, José Luis Pérez-Castellanos*
y Carlos Navarro*

Resumen La necesidad de garantizar la integridad de componentes mecánicos y estructurales de gran responsabilidad obliga a utilizar conceptos de tolerancia al daño en su diseño, para lo cual es necesario conocer las propiedades de fractura del material en las condiciones reales de operación. Cuando los componentes en estudio están sometidos a cargas dinámicas, su comportamiento, en comparación con el que tendría en condiciones estáticas, presenta importantes diferencias: la presencia de fuerzas de inercia y la posible influencia de la velocidad de deformación en las propiedades del material. El propósito de este trabajo es exponer las técnicas experimentales más utilizadas para la determinación de las propiedades de fractura de los materiales elásticos y lineales en condiciones dinámicas, así como de las herramientas analíticas y numéricas necesarias para la interpretación de los correspondientes ensayos.

Palabras clave Fractura dinámica. Tenacidad de fractura. Materiales elásticos y lineales. Técnicas experimentales.

Determination of dynamic fracture initiation toughness of linear elastic materials

Abstract The need to guarantee the structural integrity of key mechanical and structural components require the use of the damage tolerant concepts in their design, and the fracture properties of the material must be known in actual operations conditions. The behaviour of components subjected to dynamic loads is very different from that under static loads: the existence of inertial forces and the strain rate may affect the properties of the material. This work aims to present the experimental techniques most commonly used to determine the dynamic fracture properties of linear elastic materials, as well as the analytical and numerical tools used to interpret the experiments.

Keywords Dynamic fracture. Fracture toughness. Linear elastic materials. Experimental techniques.

1. INTRODUCCIÓN

El diseño optimizado de componentes mecánicos, basado en las modernas teorías de tolerancia al daño, exige tener un conocimiento preciso del comportamiento del componente en las condiciones reales de servicio y suponer, además, la presencia de posibles defectos o fisuras que hayan podido aparecer como consecuencia de los procesos de fabricación y montaje o a lo largo de la vida en servicio. En muchas estructuras, instalaciones y equi-

pos, las cargas de operación son de tipo impulsivo y, en otras, aparecen accidentalmente como en el caso, por ejemplo, del choque de un vehículo contra un obstáculo. Estas cargas pueden someter al material a elevadas velocidades de deformación. Así pues, garantizar la seguridad estructural y operativa de cualquier elemento mecánico sometido a cargas impulsivas requiere conocer su comportamiento frente a fractura en condiciones dinámicas.

La Mecánica de la Fractura es la disciplina cuyo objeto es el estudio del comportamiento de sólidos

(*) Trabajo recibido el día 21 de agosto de 2000 y aceptado en su forma final el día 7 de febrero de 2001.

(*) Departamento de Ingeniería Mecánica. Universidad Carlos III de Madrid. Avda. de la Universidad, 30, 28911 Leganés (Madrid).

que contienen fisuras macroscópicas, sometidos a sollicitaciones termomecánicas.

Para realizar el citado estudio, en problemas en los que las sollicitaciones son de carácter dinámico, es necesario considerar uno o varios de los siguientes factores que no aparecen en un problema estático: la presencia de fuerzas de inercia, la interacción de las ondas de tensión que se propagan por el interior del sólido y la influencia de la velocidad de deformación en las propiedades del material. Dichos problemas son específicamente tratados por la Mecánica de la Fractura Dinámica (MFD).

Desde un punto de vista práctico los efectos dinámicos deben tenerse en cuenta en:

- El análisis de un sólido con una fisura de longitud constante sometido a cargas que varían rápidamente con el tiempo.
- El análisis del proceso de propagación rápida de fisuras en un sólido que está sometido a sollicitaciones estáticas. En este tipo de problemas, los efectos dinámicos aparecen como consecuencia de la rápida propagación de la fisura, aún cuando las fuerzas exteriores sean invariables con el tiempo (si la velocidad de propagación de la fisura es mucho menor que la de propagación de ondas mecánicas en el material, el problema se considera cuasiestático).
- El análisis del proceso de propagación rápida de fisuras en un sólido que está sometido a sollicitaciones dinámicas.

Existen pocos textos completamente dedicados a la Mecánica de la Fractura Dinámica^[1-3], aunque pueden encontrarse excelentes introducciones al tema en textos dedicados a la Mecánica de la Fractura en general^[4 y 5].

El estudio de este tipo de problemas, además del indudable interés que tiene para el ingeniero por su importancia en el diseño y en el análisis de fiabilidad de componentes, sigue motivando investigaciones más teóricas y básicas^[6 y 7].

El hecho, ya mencionado, de que algunos materiales tienen propiedades mecánicas dependientes de la velocidad de deformación, hace necesario la evaluación de éstas en las condiciones más parecidas a las reales de operación del componente. Centrando el problema en la obtención de propiedades de fractura de los materiales, cabe destacar que, la metodología para su obtención en condiciones estáticas está recogida en diferentes normas y recomendaciones^[8-10]. Sin embargo, todavía no existe normativa aplicable a la determinación de

estas propiedades en condiciones dinámicas, aunque diferentes organismos internacionales (European Structural Integrity Society, ESIS, y Association for the Promotion of the Study of Dynamic Properties of Materials, DYMAT) están organizando grupos de trabajo con el objetivo de establecer normas y recomendaciones para la realización de ensayos de fractura en condiciones dinámicas.

El propósito de este trabajo es exponer las técnicas experimentales más utilizadas para la determinación de la tenacidad de fractura dinámica de iniciación de los materiales, así como las herramientas analíticas y numéricas necesarias para la interpretación de los resultados de los ensayos correspondientes. El trabajo está dividido en dos partes: esta primera, dedicada a materiales cuyo comportamiento puede describirse mediante las ecuaciones de la elasticidad lineal y una segunda parte, contenida en un posterior artículo, dedicada a materiales cuyo comportamiento es elastoplástico. En ambos trabajos se considerarán materiales homogéneos e isótropos con fisuras sollicitadas en modo I. Aunque el problema es, por naturaleza, tridimensional, se analizarán resultados basados en soluciones bidimensionales, dado que las tridimensionales, o no existen hasta el momento, o por su complejidad no permiten obtener resultados fácilmente utilizables. No obstante, como han puesto de manifiesto recientes investigaciones^[11], el carácter tridimensional del problema no debe ser olvidado, dado que, en algunas situaciones, con las soluciones bidimensionales se pueden cometer errores de interpretación muy importantes.

En los siguientes apartados se exponen algunos conceptos fundamentales de MFD y se reseñan las técnicas más usadas para la evaluación de la tenacidad de fractura en condiciones dinámicas de los materiales. Finalmente, se mencionan algunos estudios que tratan de explicar la influencia de la velocidad de deformación en la tenacidad de fractura de algunos materiales concretos.

2. CRITERIOS DE FRACTURA. LEYES DE PROPAGACIÓN DINÁMICA DE FISURAS

2.1. Campos de tensiones y desplazamientos en el fondo de una fisura en modo I

Se considera un sólido bidimensional constituido por un material homogéneo e isótropo, con comportamiento elástico y lineal y que contiene una fisura que se propaga en modo I con una velocidad variable, $v(t)$. Los campos de tensiones y

desplazamientos en las proximidades del extremo de la fisura pueden escribirse como^[12-14]:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I(t, v)}{\sqrt{2\pi r}} \hat{\sigma}_{ij}(\theta, v, c_1, c_2) \quad (1)$$

$$u_i = \frac{(1+\nu)K_I(t, v)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \hat{u}_i(\theta; v, \nu, c_1, c_2) \quad (2)$$

donde σ_{ij} y u_i son, respectivamente, las componentes del tensor de tensiones y del vector desplazamiento referidas a un sistema de coordenadas móvil, x-y, cuyo origen coincide con el extremo de la fisura (Fig. 1); K_I es el factor de intensidad de tensiones, que depende de la geometría del sólido, de las cargas exteriores y de la velocidad, v , a la que se propaga la fisura, E y ν son el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson del material, respectivamente, r y θ son las coordenadas del punto considerado en un sistema de referencia polar cuyo origen coincide con el extremo de la fisura en movimiento (ver figura 1) y $\hat{\sigma}_{ij}$ y \hat{u}_i son funciones conocidas que dependen de la coordenada θ , de la velocidad de propagación de la fisura, v , y de las velocidades de propagación de ondas dilatacionales, c_1 , y de cortadura, c_2 , en el sólido, así como de ν en el caso de las funciones u_i .

Las características esenciales de la solución para el campo de tensiones, expresada por la ecuación (1), son las siguientes:

- Es una solución asintótica, puesto que es el primer término de una serie infinita que constituye la solución completa; por tanto es válida, exclusivamente, en el entorno de $r = 0$.

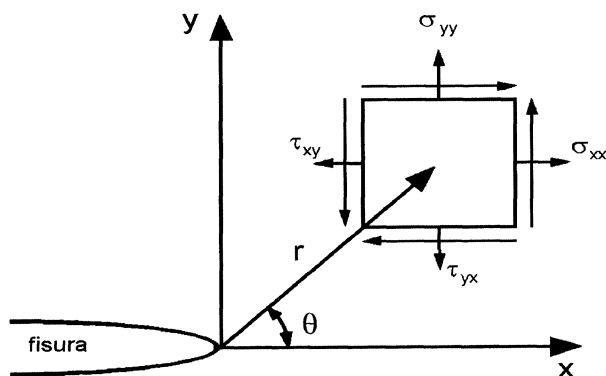


Figura 1. Definición del sistema de referencia.

Figure 1. Reference system definition.

- Es una solución singular, es decir, predice valores infinitos de tensión en el mismo extremo de la fisura ($r = 0$).
- A diferencia de lo que ocurre en el caso estático, depende del estado de deformación considerado (tensión plana o deformación plana).

En el caso de que la fisura sea estacionaria ($v = 0$), la solución para las tensiones y los desplazamientos coincide formalmente con la del caso estático, es decir:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I(t)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (3)$$

$$u_i = \frac{(1+\nu)K_I(t)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i(\theta; \nu) \quad (4)$$

donde $f_{ij}(\theta)$ y $g_i(\theta; \nu)$ son las mismas funciones del caso estático, que dependen, únicamente, de la coordenada θ . Naturalmente, el cálculo del factor de intensidad de tensiones habrá de realizarse teniendo en cuenta las condiciones dinámicas del problema.

En una fisura que se propaga en modo I, contenida en un sólido infinito, el factor de intensidad de tensiones, $K_I(t, v)$, se puede calcular como^[15-17]:

$$K_I(t, v) = \kappa(v)K_I(t, 0) \quad (5)$$

donde $K_I(t, 0)$ es el factor de intensidad de tensiones correspondiente a una fisura estacionaria de la misma longitud y $\kappa(v)$ es una función universal, dependiente de la velocidad de propagación, que puede escribirse como^[18]:

$$\kappa(v) = \left(1 - \frac{v}{c_R}\right) \sqrt{1 - hv} \quad (6)$$

En esta ecuación, c_R es la velocidad de las ondas de Rayleigh en el material y el parámetro h puede aproximarse por:

$$h \approx \frac{2}{c_0} \left(\frac{c_2}{c_R}\right)^2 \left(1 - \frac{c_2}{c_0}\right)^2 \quad (7)$$

siendo c_0 la velocidad de propagación de ondas longitudinales en el material.

Puede observarse que la función $\kappa(v)$ toma el valor 1 en el caso de fisura estacionaria ($v = 0$). Como ya se ha indicado, la expresión (5)

es únicamente válida en sólidos infinitos. Desde un punto de vista práctico, esto quiere decir que se puede aplicar, únicamente, a situaciones en las que los bordes del sólido estén lejos del extremo de la fisura. De otra manera, se producirán interacciones con las ondas reflejadas en los citados bordes y, por tanto, el factor de intensidad de tensiones habrá de obtenerse para cada caso particular, bien por métodos numéricos o bien experimentalmente.

2.2. Tasa de liberación de energía

En condiciones dinámicas, la tasa de liberación de energía, G , se define a partir de la definición original de Griffith e Irwin para condiciones estáticas, incorporando la energía cinética en el balance energético global del sólido fisurado, es decir:

$$G(t) = \frac{dF}{da} - \frac{dU}{da} - \frac{dE_k}{da} \quad (8)$$

donde F es el trabajo realizado por las fuerzas exteriores, U es la energía de deformación, E_k es la energía cinética y a es la longitud de la fisura. La tasa de liberación de energía representa la energía disponible para la propagación de la fisura. Diferentes autores^[15, 19 y 20] han desarrollado expresiones para G equivalentes a la propuesta más recientemente por Morán y Shih^[21]:

$$G(t) = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} (\omega + \tau) dy - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} n_j ds \quad (9)$$

donde Γ es una curva arbitraria que rodea el extremo de la fisura, n_j es el vector unitario normal a la curva Γ , s es la variable espacial asociada al camino de integración y ω y τ son las densidades de energía de deformación y cinética, respectivamente. A diferencia de lo que ocurre en el caso estático, la tasa de liberación de energía no se puede representar mediante una integral independiente del camino de integración, salvo en el caso de que la fisura se propague a velocidad constante^[19]. En particular, cuando la fisura es estacionaria ($v = 0$), la tasa de liberación de energía coincide con la integral J de Rice^[22].

Para fisuras que se propagan con velocidad constante en un sólido infinito, Craggs^[23] y Freund^[15] obtuvieron una relación entre la tasa de liberación de energía, $G(t)$, y el factor de intensidad de tensiones, $K_I(t)$. Para un estado de deformación plana, dicha relación se puede escribir como:

$$G(t) = A(v) \frac{(K_I(t))^2 (1 - v^2)}{E} \quad (10)$$

donde v y E son el coeficiente de Poisson y el módulo de elasticidad del material, respectivamente. La función $A(v)$ obedece a la expresión:

$$A(v) = \frac{v^2 \beta_1}{(1 - v)c_2^2 D(v)} \quad (11)$$

con:

$$D(v) = 4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2 \quad (12)$$

$$\beta_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c_1}\right)^2} \quad (13)$$

$$\beta_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c_2}\right)^2} \quad (14)$$

Puede comprobarse que para fisuras estacionarias ($v = 0$), la función $A(v)$ toma el valor 1.

2.3. Tenacidad de fractura dinámica de iniciación

Ya se ha mencionado que uno de los problemas que trata MFD es el análisis del comportamiento de sólidos fisurados sometidos a cargas que varían rápidamente con el tiempo. Una de las cuestiones fundamentales a resolver es la predicción de las condiciones en las que la fisura empezará a propagarse. A la vista de la ecuación (3), se puede establecer un criterio de iniciación de la propagación diciendo que la fisura comenzará su crecimiento cuando el valor del factor de intensidad de tensiones, $K_I(t)$, alcance un valor crítico. Cuando se cumplen determinadas condiciones, este valor crítico se puede considerar una propiedad del material, denominada tenacidad de fractura dinámica de iniciación, K_{Id} , dependiente de la velocidad de deformación, $\dot{\epsilon}$, y de la temperatura, T . Así pues, el criterio de iniciación de la propagación se puede escribir como:

$$K_I(t) = K_{Id}(\dot{\epsilon}, T) \quad (15)$$

Este criterio puede plantearse partiendo de consideraciones energéticas, ya que, como se ha dicho, la tasa de liberación de energía definida por las ecuaciones (8) y (9) coincide con la energía disponible para propagar la fisura. Por tanto, cuando dicho valor de energía disponible, que dependerá de la geometría del sólido, de las propiedades elásticas del material y de las sollicitaciones exteriores, alcance el valor de la energía necesaria para que la fisura propague (parámetro que depende de la velocidad de deformación y la temperatura), comenzará la propagación de la fisura.

2.4. Ley de propagación dinámica de fisuras. Tenacidad de fractura dinámica de propagación

Una vez que la fisura inicia su propagación, ésta se mantendrá siempre que se cumpla la condición:

$$K_I(t,v) = K_{ID}(v,T) \quad (16)$$

siendo $K_I(t,v)$ el factor de intensidad de tensiones y K_{ID} un parámetro, que se denomina tenacidad de fractura dinámica de propagación, el cual depende de la velocidad a la que se propaga la fisura, v , y de la temperatura, T . Aunque se han hecho intentos de predecir la dependencia entre K_I y v durante la propagación de la fisura^[24 y 25] no existen conclusiones definitivas al respecto, de tal manera que esta relación se considera una propiedad del material que ha de ser evaluada experimentalmente. La explicación de las relaciones entre K_I y v constituye, hoy por hoy, uno de los retos más importantes en la investigación relacionada con la fractura dinámica de los materiales. Los estudios que se realizan para entender estas relaciones apuntan al análisis cuantitativo de los micromecanismos de fractura dominantes e, incluso, a la utilización de métodos basados en la Dinámica Molecular^[26 y 27].

2.5. Tenacidad de fractura de detención de la propagación

La ecuación (16) define las condiciones de propagación de una fisura. Si, por algún motivo, $K_I(t)$ se hace inferior al mínimo valor de K_{ID} durante un cierto intervalo de tiempo, la fisura detendrá su propagación.

El valor del factor de intensidad de tensiones, para el cual una fisura detiene su propagación, se denomina tenacidad de detención de propagación, K_{IA} . Kanninen y Popelar^[4] establecieron la si-

guiente relación empírica entre los parámetros K_{ID} y K_{IA} :

$$K_{ID} = \frac{K_{IA}}{1 - \left(\frac{v}{v_{lim}}\right)^m} \quad (17)$$

donde m es una constante que debe ser evaluada experimentalmente y v_{lim} es la máxima velocidad a la que podría propagarse la fisura (velocidad límite de propagación). En un medio infinito, el valor para dicha velocidad límite viene dado por la ecuación^[28-30]:

$$v_{lim} = c_R \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \quad (18)$$

donde a_0 y a son las longitudes inicial y actual de la fisura, respectivamente.

Para la determinación de K_{IA} se suele recurrir a procedimientos normalizados^[31] que se basan en formulaciones cuasiestáticas. El valor así obtenido se denomina K_{Ia} , el cual no se puede considerar una propiedad del material y, aunque suele conducir a conclusiones conservadoras ($K_{Ia} < K_{IA}$), no siempre es así, como han puesto de manifiesto Kalthoff y otros^[32]. Es necesario, por tanto, analizar en cada caso la conveniencia de utilizarlo.

3. OBTENCIÓN DE LA TENACIDAD DE FRACTURA DINÁMICA DE INICIACIÓN

3.1. Procedimiento general

Para la obtención experimental de la tenacidad de fractura dinámica de iniciación, K_{Id} , será necesario ensayar en modo I una probeta que contenga una fisura y determinar, por un lado, la variación temporal del factor de intensidad de tensiones, $K_I(t)$, y, por otro, el instante en el que empieza a propagarse la fisura, t_f . Con estos datos, la tenacidad de fractura dinámica de iniciación vendrá dada por:

$$K_{Id} = K_I(t_f) \quad (19)$$

3.2. Tipos de ensayos

En este apartado se describen varios tipos de ensayos que han sido usados por diferentes investigadores, con objeto de obtener las propiedades de fractura en condiciones dinámicas de los materiales.

3.2.1. Ensayos en máquinas servo-hidráulicas convencionales

Este tipo de ensayos fue desarrollado por Couque y otros^[33] quienes diseñaron el dispositivo cuyo esquema se muestra en la figura 2. En este ensayo se cargan dos probetas fisuradas de tipo compacto con un sistema consistente en dos barras unidas a la máquina de ensayos y unidas entre sí mediante una pieza entallada lateralmente denominada probeta entallada de iniciación (ver figura 2). Una vez en carga, se secciona, mediante una herramienta de corte, la pieza entallada que mantiene unidas las barras, con lo cual se libera rápidamente la energía elástica almacenada en éstas y se produce una carga dinámica sobre las probetas, que da lugar a la propagación inestable de la fisura contenida en ellas.

3.2.2. Ensayos en máquinas servo-hidráulicas especiales

Estas máquinas son capaces de desplazar el pistón móvil a una velocidad de 10 m/s. Beguelin y

otros^[34] han ensayado probetas compactas en este tipo de dispositivos para medir las propiedades de fractura dinámica de los materiales.

3.2.3. Ensayos en péndulo Charpy y torre de caída de peso

Probablemente, los ensayos más populares para la determinación de la tenacidad de fractura dinámica de iniciación son los ensayos Charpy. No se van a describir aquí los ensayos en péndulo Charpy o torre de caída de peso, por ser bien conocidos, pero hay que destacar algunas de sus limitaciones, a saber:

- Cuando se usan probetas Charpy prefisuradas por fatiga, de materiales relativamente tenaces, en el momento de la propagación de la fisura, no se cumplen las condiciones requeridas para obtener la tenacidad de fractura de iniciación, K_{I0} (no existen condiciones de deformación plana o la zona plástica es muy grande con relación a las dimensiones de la probeta). Por tanto, en estos casos, se hace necesario usar probetas más grandes, de 20 mm de canto, por ejemplo, lo cual es imposible en un péndulo Charpy convencional. Si el ensayo se realizara en una torre de caída de peso, ésta debería ser suficientemente rígida.
- En todo caso, en estos ensayos no se pueden superar velocidades de sollicitación, medidas en términos de variación temporal del factor de intensidad de tensiones, de $\dot{K}_I = 10^5 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}} \text{ s}^{-1}$; así pues, si se desea superar esta velocidad de sollicitación, se debe recurrir a otros dispositivos.

3.2.4. Ensayos de flexión en dispositivos de barra Hopkinson modificados

Como alternativa a los ensayos de flexión dinámica en péndulo Charpy, y con objeto de superar las velocidades de sollicitación antes mencionadas, se han utilizado dispositivos de barra Hopkinson modificados^[35-37]. Estos dispositivos constan esencialmente de una barra denominada barra incidente, la cual es impactada por otra barra más corta del mismo material y de un sistema de apoyos que es diferente según los casos. El sistema se completa con un sistema de aire comprimido, que se usa para impulsar la barra más corta y con un medidor de velocidad. La probeta de flexión se coloca en el sistema de apoyos y recibe la onda de compresión generada por el impacto de las otras dos barras

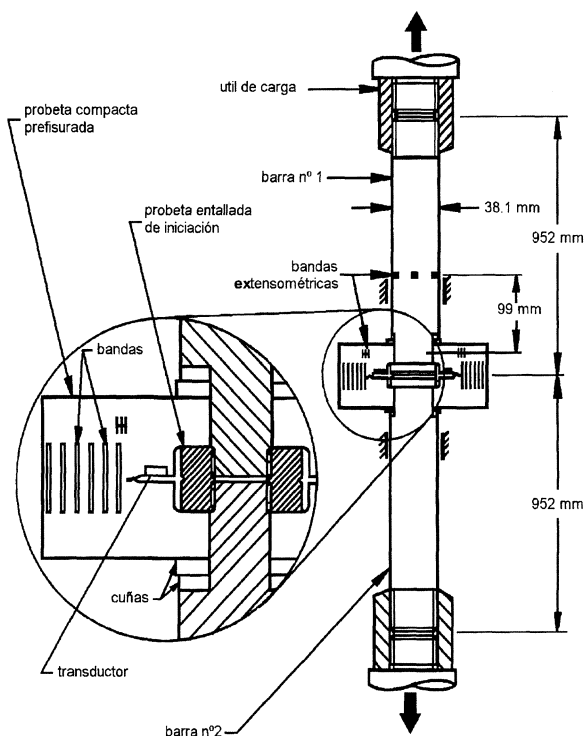


Figura 2. Dispositivo para realizar ensayos de fractura dinámica en una máquina servohidráulica convencional (Couque et al.^[33]).

Figure 2. Experimental setup for dynamic fracture test using a conventional servohydraulic machine (Couque et al.^[33]).

antes mencionadas. Parte de esta onda se propaga por el sistema de apoyos y parte se refleja viajando por la barra incidente como onda de tracción. Las deformaciones generadas por estas ondas se miden por medio de bandas extensométricas situadas en la barra incidente. Ruiz y Mines^[35] utilizan una barra incidente instrumentada en dos secciones, mientras que en otros casos se ha instrumentado la barra incidente en una única sección^[36 y 37].

En la figura 3 se muestran dos variantes de este tipo de dispositivos (en la figura 3a el utilizado por Yokoyama^[36] y en la figura 3b el usado por Rubio^[37]). En cualquiera de ellos se pueden alcanzar velocidades de sollicitación del orden de $\dot{K}_I = 10^6 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}} \text{ s}^{-1}$

3.2.5. Otros ensayos en barra Hopkinson

Además de los ensayos de flexión dinámica reseñados, se han desarrollado otros en los que se utilizan dispositivos de barra Hopkinson con otro tipo de probetas y configuraciones, con objeto de determinar las propiedades de fractura dinámica de los materiales. A continuación se citan los siguientes:

a) Ensayos de tracción dinámica sobre probetas de tracción entalladas lateralmente, utilizados por Costin y otros^[38]. La probeta consiste en una barra cilíndrica, en la que se practican entallas

circunferenciales, a partir de las cuales se generan fisuras de fatiga y posteriormente se ensayan a tracción dinámica.

- b) Ensayos sobre probetas compactas. Este tipo de probetas ha sido utilizado por Andrzejewski y otros^[39] y Klepaczko^[40] en dispositivos de barra Hopkinson de compresión. En la figura 4 aparece un esquema de la disposición del ensayo. La probeta compacta se carga mediante una cuña situada al final de la barra incidente.
- c) Ensayos sobre probetas Charpy cargadas lateralmente. Clos y otros^[41] han utilizado probetas Charpy prefisuradas por fatiga y cargadas lateralmente mediante un dispositivo de barra Hopkinson modificado (Fig. 5). La probeta se carga en una de sus caras paralelas al plano que contiene la fisura mediante un pulso de compresión. Cuando el pulso alcanza la otra cara de la probeta, paralela a la anterior, que puede considerarse libre, se refleja como pulso de tracción y, dependiendo de su magnitud, cuando alcanza el extremo de la fisura puede provocar la propagación de ésta.
- d) Ensayos sobre probetas compactas de compresión, CCS. Maigre y Rittel^[42 y 43] han propuesto un nuevo tipo de probeta, la denominada compacta de compresión (Compact Compression Specimen, CCS), para ser usadas en una barra Hopkinson de compresión convencional (Fig. 6).

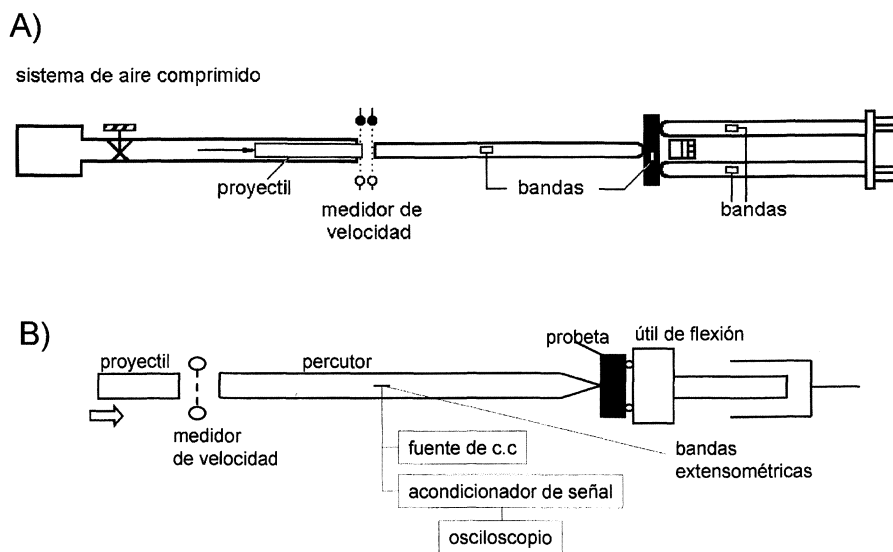


Figura 3. Dispositivos de barra Hopkinson modificados para ensayos de flexión dinámica en tres puntos. a) Dispositivo usado por Yokoyama^[36] b) Dispositivo usado por Rubio^[37].

Figure 3. Experimental setup for dynamic three point bending test using a modified split Hopkinson pressure bar. a) Yokoyama^[36] b) Rubio^[37].

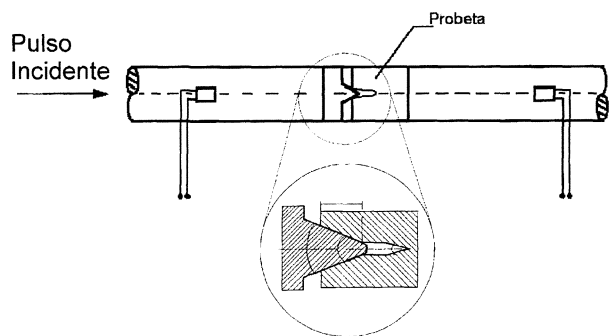


Figura 4. Dispositivo para realizar ensayos de fractura dinámica sobre probetas compactas en una barra Hopkinson (Klepaczko et al.^[39 y 40]).

Figure 4. Experimental setup for dynamic fracture test on Compact Specimens using a split Hopkinson pressure bar. (Klepaczko et al.^[39 and 40]).

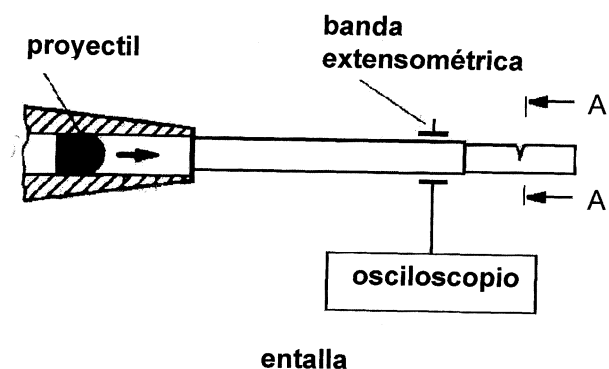


Figura 5. Dispositivo para realizar ensayos de fractura dinámica sobre probetas Charpy cargadas lateralmente. (Clos et al.^[41]).

Figure 5. Experimental setup for dynamic fracture test on the Charpy Specimens loaded by a lateral face. (Clos et al.^[41]).

De los dispositivos experimentales reseñados para determinar las propiedades de fractura dinámica de los materiales a alta velocidad de deformación, capaces de alcanzar velocidades de sollicitación del orden de $\dot{K}_I = 10^6 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}} \text{ s}^{-1}$, frente a las que se alcanzan en péndulo Charpy (como máximo $\dot{K}_I = 10^5 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}} \text{ s}^{-1}$) o las que se obtienen en ensayos cuasiestáticos ($\dot{K}_I = 1 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}} \text{ s}^{-1}$), los más extendidos son los que permiten realizar ensayos de flexión dinámica en barra Hopkinson modificada, como ponen de manifiesto el gran número de estudios existentes en comparación con el resto. Existen mayor experiencia y conocimientos teóricos para analizar los resultados de ese tipo de ensayos. Por tal motivo, a continuación se van a analizar los métodos que se usan para la interpreta-

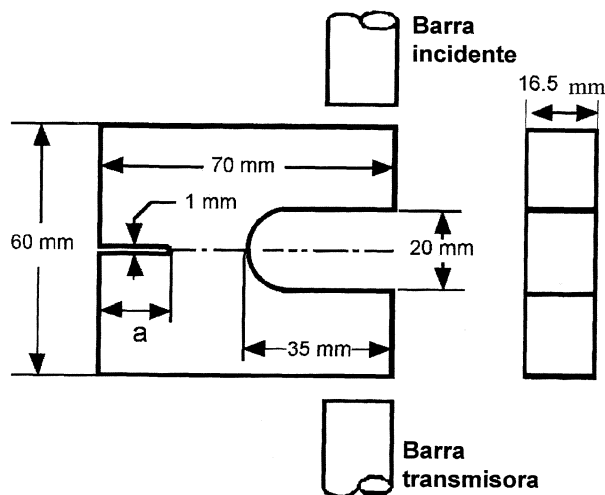


Figura 6. Dispositivo para realizar ensayos de fractura dinámica sobre probetas compactas de compresión en una barra Hopkinson (Maigre y Rittel^[42 y 43]).

Figure 6. Experimental setup for dynamic fracture test on Compact Compression Specimens (CCS) using a split Hopkinson pressure bar. (Maigre and Rittel^[42 and 43]).

ción de los resultados de flexión dinámica en dispositivos de barra Hopkinson modificada.

3.3. Obtención del factor de intensidad de tensiones en ensayos de flexión dinámica en tres puntos

En este apartado se mencionan los métodos que se utilizan para evaluar el factor de intensidad de tensiones en ensayos de flexión dinámica en tres puntos, tanto para fisuras estacionarias, como para aquellas que se propagan con velocidad v . Se han clasificado los diferentes métodos en cuatro grupos: analíticos, numéricos, experimentales y mixtos. Los aspectos más relevantes de cada uno de ellos se exponen a continuación.

3.3.1. Métodos analíticos

Los métodos analíticos se basan en el establecimiento de un modelo simple del proceso de impacto sobre la probeta de flexión en tres puntos, con objeto de calcular los desplazamientos del punto donde se aplica la carga y , a partir de este dato, evaluar el factor de intensidad de tensiones, usando la misma relación que liga dichas variables en el caso estático. Se han utilizado varios tipos de modelos, entre los que cabe destacar los basados en sistemas de un único grado de libertad^[44], en los que se supone que el elemento impactador tiene

velocidad constante durante el tiempo que dura el ensayo. Dutton y Mines^[45] también utilizaron un sistema de un grado de libertad, pero introduciendo como dato de partida la velocidad, variable con el tiempo, que experimenta la masa que representa la probeta de ensayo. Marur y otros^[46] emplearon un sistema de un grado de libertad en el que se conoce la variación de la fuerza que se ejerce sobre la probeta, fuerza que se mide instrumentando apropiadamente el elemento que impacta sobre ella. Marur y Nair^[47] modelizaron el proceso de impacto mediante un sistema de dos grados de libertad (probeta y elemento impactador) en el que, además, consideraron los posibles efectos de disipación viscosa provocada, bien por las características viscoelásticas del material ensayado (polímeros, por ejemplo), bien por el contacto probeta-martillo o probeta-apoyos. En este modelo se introduce como condición inicial la velocidad con la que impacta el martillo.

Como ejemplo de la utilización de los métodos analíticos se describe a continuación el modelo del ensayo de flexión dinámica en tres puntos, basado en un sistema de un grado de libertad (ver Fig. 7). El sistema consta de una masa, m , que se estima

como $m = \frac{17}{35} M$ ^[44], donde M es la masa total de la

probeta, y un muelle, cuya constante k_r representa la rigidez de la probeta de flexión en tres puntos fisurada. En la referencia^[44] puede encontrarse la expresión de k_r . Sobre la masa m se aplica una

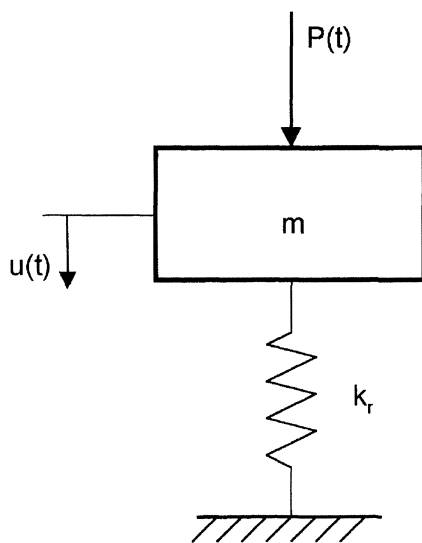


Figura 7. Sistema de un grado de libertad para simular un ensayo de flexión dinámica en tres puntos.

Figure 7. One degree of freedom system to model a dynamic three point bending test.

fuerza, variable con el tiempo, $P(t)$, que se supone conocida (se puede medir experimentalmente durante el ensayo). La ecuación que gobierna el desplazamiento, u , de la masa m (ver Fig. 7) es:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + k_r u = P(t) \quad (20)$$

Suponiendo que la masa parte del reposo, es decir, que en el instante inicial ($t = 0$), tanto su desplazamiento como su velocidad son nulos, la solución de esta ecuación viene dada por:

$$u = \frac{\omega}{k_r} \int_0^t P(\tau) \sin[\omega(t - \tau)] d\tau \quad (21)$$

donde $\omega = \sqrt{\frac{k_r}{m}}$ es la frecuencia natural del sistema.

Haciendo la hipótesis de que el factor de intensidad de tensiones, $K_I(t)$, es proporcional al desplazamiento de la masa m , y que la constante de proporcionalidad es la misma que en el caso estático, la expresión para $K_I(t)$ es:

$$\frac{K_I(t)}{K_I^{est}} = \frac{\omega}{P(t)} \int_0^t P(\tau) \sin(\omega(t - \tau)) d\tau \quad (22)$$

donde K_I^{est} es el factor de intensidad de tensiones en condiciones estáticas cuya expresión puede encontrarse, por ejemplo, en la referencia^[8].

También se han utilizado sistemas de varios grados de libertad^[48], así como de infinitos grados de libertad (modelizando la probeta como una viga fisurada). Entre estos últimos, cabe destacar el trabajo pionero de Nash^[49] quien calculó las frecuencias y modos propios de flexión de una viga de Euler-Bernoulli con una fisura en su sección central. A partir de este resultado y utilizando el método de superposición modal se puede calcular el desplazamiento del punto de carga, conocida la fuerza que se ejerce sobre la probeta. Kishimoto y otros^[50] calcularon dicho desplazamiento utilizando, únicamente, la primera frecuencia del sistema (frecuencia fundamental). En este caso, la ecuación (22) sigue siendo válida y el cálculo preciso de la frecuencia fundamental de la viga fisurada, ω , es de vital importancia. Ésta puede ser evaluada por el método de Nash^[49], cuando se considera que la probeta se comporta como una viga de Euler-

Bernouilli, aunque por las dimensiones normalizadas de las probetas de flexión en tres puntos, se debe considerar, en el cálculo de ω , el efecto de la fuerza cortante y de la energía cinética debida a la rotación de las secciones de la viga (viga de Timoshenko)^[51,52 y 37].

3.3.2. Métodos numéricos

Otros investigadores han utilizado métodos numéricos (principalmente el Método de los Elementos Finitos) para la evaluación del factor de intensidad de tensiones. Entre los trabajos más recientes cabe destacar los análisis bidimensionales de Crouch^[53] y Yokoyama^[36]. En este último, se simulan ensayos de flexión dinámica realizados en un dispositivo de barra Hopkinson modificado. Se modeliza la probeta de flexión en tres puntos fisurada y se utiliza como condición de carga la fuerza en la sección central de la probeta, así como la que aparece como reacción en los apoyos. Estas fuerzas se obtienen experimentalmente en ensayos en los que tanto la barra incidente como los apoyos están instrumentados. Se calcula el factor de intensidad de tensiones a partir del desplazamiento de un punto próximo al extremo de la fisura, suponiendo que la relación que existe entre este desplazamiento y el factor de intensidad de tensiones es la misma que en condiciones estáticas. Rubio y otros^[54] han simulado el mismo tipo de ensayo mediante un análisis bidimensional, pero modelizando, también, la barra incidente y considerando el contacto entre la barra y la probeta. La presencia de los apoyos se simula impidiendo el desplazamiento, en la dirección longitudinal de la barra incidente, del punto de la probeta en contacto con los apoyos. Guo y otros^[55] han realizado un análisis tridimensional similar al anterior. También se han realizado simulaciones bidimensionales que tienen en cuenta el contacto entre barra incidente y probeta y de ésta con el sistema de apoyo, con objeto de analizar la posible influencia de estos contactos en el factor de intensidad de tensiones^[37].

En los casos citados anteriormente, la fisura se considera estacionaria durante todo el análisis. Nishioka y otros^[56] han presentado resultados numéricos de ensayos de flexión en tres puntos en los que se tiene en cuenta la propagación dinámica de la fisura. Para hacer este tipo de estudios es necesario, bien suponer una velocidad de propagación de la fisura, $v(t)$, y calcular $K_I(v)$, o bien, partir de una relación, $K_I(v)$, conocida, para obtener la velocidad de propagación de la fisura.

3.3.3. Métodos experimentales

Los métodos que se denominan experimentales son aquellos que permiten obtener información sobre el campo de deformaciones, tensiones o desplazamientos en la probeta, para, a partir de ellos, calcular el factor de intensidad de tensiones en condiciones dinámicas. Entre los diferentes procedimientos utilizados para alcanzar dicho objetivo, cabe destacar los métodos ópticos, y, entre ellos, los siguientes:

- Métodos basados en fotoelasticidad. Se han usado técnicas fotoelásticas, tanto por transmisión^[57-59], únicamente aplicable a sólidos birrefringentes o a réplicas realizadas con este tipo de material, como por reflexión^[60 y 61], en los que es necesario recubrir el sólido con una fina capa de material birrefringente. Por estos procedimientos se puede visualizar el lugar geométrico de los puntos del sólido donde la diferencia de las tensiones principales es una constante conocida.
- Método de las cáusticas. La técnica fue introducida por Manogg en 1964^[62] y posteriormente desarrollada por diferentes investigadores^[63-66]. El método permite determinar el desplazamiento de los puntos de una superficie inicialmente plana en dirección perpendicular a dicha superficie y consiste en iluminar la superficie mediante luz colimada, recogiendo los rayos transmitidos o reflejados, dependiendo de si es un sólido transparente o una superficie especular, en una pantalla situada en un plano que dista una magnitud conocida de la superficie iluminada. Debido a los cambios de espesor en el sólido y al hecho de que se focaliza en un plano distinto al plano del mismo, parte de los rayos no son recogidos, produciéndose una zona oscura limitada por una línea luminosa, que es la denominada cáustica. Analizando la forma y tamaño de esta cáustica, se pueden calcular los desplazamientos perpendiculares a la superficie en la zona visualizada. Para que aparezca una cáustica, es preciso que exista una importante deformación no coplanaria en la zona analizada. Este hecho permite su utilización en problemas de fractura, donde existe una fuerte concentración de deformaciones en el extremo de una fisura. Iluminando el campo cercano al extremo de ésta, aparece una cáustica cuyo tamaño se puede relacionar con el factor de intensidad de tensiones.

- Método basados en difracción Moiré^[11, 67]. Este método consiste en insertar en el haz de luz (que ha de ser coherente), un modelo de dos rejillas separadas una cierta distancia. Con este método se pueden medir variaciones del desplazamiento no coplanario con la superficie que se observa. A partir de esta información, y utilizando las soluciones elastodinámicas, se puede evaluar el factor de intensidad de tensiones. Aunque con este método no se pueden determinar deformaciones coplanarias, tiene la ventaja de que es insensible a vibraciones del sistema.

Las aplicaciones de los métodos mencionados requieren el registro de las correspondientes imágenes para su posterior procesado. Dado el carácter dinámico de los eventos que se pretenden captar, es necesario disponer de cámaras de fotografía y vídeo de alta velocidad.

Otro procedimiento que se ha utilizado para la obtención de $K_I(t)$ es el de la colocación de bandas extensométricas^[68 y 69] cerca del extremo de la fisura para medir la deformación longitudinal en la dirección de la banda y a partir de este dato, obtener el factor de intensidad de tensiones.

Dado que, con los métodos experimentales antes citados, el factor de intensidad de tensiones se obtiene a partir de las soluciones elastodinámicas que describen los campos de tensiones, deformaciones y desplazamientos en un sólido fisurado, la precisión con que se puedan evaluar dichas magnitudes (tensiones, deformaciones, desplazamientos), es de gran importancia.

Otros procedimientos mucho más complejos y, por ello, menos utilizados son los basados en la medida del cambio de temperatura en el extremo de la fisura^[70] y de la emisión acústica^[71]. Además de la complejidad de la instrumentación, ya mencionada, estos métodos sólo son aplicables al caso de grietas que se están propagando.

3.3.4. Métodos mixtos

En este tipo de métodos puede ser incluido el denominado como “método de la curva de respuesta al impacto”, introducido por Kalthoff^[72] y desarrollado posteriormente por Böhme^[73 y 74].

Consiste básicamente en suponer que se cumple la siguiente expresión:

$$K_I(t) = (K_I)_{est} k^{din}(t) \quad (23)$$

donde $(K_I)_{est}$ es el factor de intensidad de tensiones calculado en condiciones estáticas y $k^{din}(t)$ es una función que ha de ser evaluada experimentalmente. Para ello se pueden utilizar bandas extensométricas situadas cerca del extremo de la fisura^[72] o el método de las cáusticas^[73 y 74]. Böhme ha puesto de manifiesto que, cuando $k^{din}(t)$ se expresa en función de la variable adimensional $c_0 t/W$, dicha función es independiente de factores como la masa del impactador, la velocidad de impacto y el espesor de la probeta, mientras que depende, sin embargo, de la relación entre la longitud de la fisura y el canto, a/W , y de la relación entre el canto y la distancia entre apoyos, W/L .

También en este epígrafe pueden ser citados los trabajos de Rokach^[75 y 76] quien ha usado un procedimiento mixto, numérico-experimental, basado en los modelos de Nash^[49] y Kishimoto y otros^[51], en el que utiliza, como datos de partida para evaluar el factor de intensidad de tensiones, las medidas experimentales de la fuerza ejercida por el impactador sobre la probeta y de la fuerza de reacción ejercida por los apoyos.

3.4. Obtención del factor de intensidad de tensiones en ensayos de flexión dinámica en un punto

El ensayo de flexión en un punto ha sido utilizado por Giovanola^[77 y 78] y consiste en impactar con una masa móvil una probeta fisurada como en el caso de un ensayo de flexión en tres puntos, pero con la importante diferencia de que la probeta no está, ahora, apoyada y, por lo tanto, las tensiones y deformaciones que se producen en ella están motivadas, exclusivamente, por las fuerzas de inercia (Fig. 8). Si, como consecuencia del estado de cargas generado, se alcanzan las condiciones críticas en el extremo de la fisura, esta se propagará. La masa que impacta la probeta puede ser el martillo de un péndulo Charpy, el percutor de una torre de caída de peso o bien una masa lanzada mediante dispositivos neumáticos. También se han desarrollado sistemas de carga basados en la barra Hopkinson modificada^[79]. Normalmente, los ensayos de flexión en un punto se realizan utilizando el mismo tipo de probeta que la usada en los ensayos de flexión en tres puntos, aunque recientemente se ha propuesto la utilización de probetas en forma de arco, para aplicaciones específicas^[80].

Para obtener el factor de intensidad de tensiones en los ensayos de flexión en un punto se puede

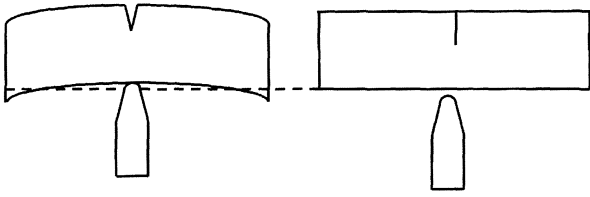


Figura 8. Esquema del ensayo de flexión en un punto.

Figure 8. Schematic view of the one point bending test.

acudir a los mismos métodos mencionados para el caso de flexión en tres puntos.

- Métodos analíticos simplificados. Kishimoto y otros^[81] han modelado el ensayo de flexión en un punto analizando el comportamiento de una viga de Euler-Bernoulli sin apoyar y con una fisura en su sección central, sometida a una carga concentrada, $P(t)$, en esa misma sección. Una vez calculados las frecuencias y modos propios de la viga en flexión, aplicando el método de superposición modal, se puede obtener el desplazamiento del punto de aplicación de carga, así como, también, el momento flector transmitido por la sección fisurada. El factor de intensidad de tensiones se calcula haciendo la hipótesis de que es proporcional, bien al momento flector transmitido por la sección fisurada, bien a la diferencia entre el desplazamiento del punto de carga y el desplazamiento del punto que hubiera estado apoyado en el caso de un ensayo de flexión en tres puntos. Las constantes de proporcionalidad usadas son las correspondientes al caso de flexión en tres puntos en condiciones estáticas.
- Métodos numéricos. Los ensayos de flexión en un punto se han simulado numéricamente utilizando el método de los Elementos Finitos^[37, 54 y 79] y el método de las Diferencias Finitas^[80]. La simulación numérica de este tipo de ensayos es más simple, dado que son más fáciles de imponer las condiciones de contorno, al no existir sistema de apoyo.
- Métodos experimentales. En este caso, el método consiste en colocar bandas extensométricas cerca del extremo de la fisura^[77 y 80]. El sistema es idéntico al que se describió en el caso de ensayos de flexión en tres puntos.

Comparando los ensayos de flexión en un punto con los de flexión en tres puntos, se puede decir que la ventaja de los primeros se deriva de la au-

sencia de apoyos, lo cual simplifica el dispositivo de ensayo y elimina las interacciones entre la probeta y el sistema de apoyos. Sin embargo, como han puesto de manifiesto análisis numéricos comparativos de ambos tipos de ensayo^[37 y 54], los de flexión en un punto sólo son aplicables a materiales muy frágiles, dado que, para las mismas condiciones, los valores máximos de K_I que se alcanzan son inferiores a los de flexión dinámica en tres puntos.

3.5. Obtención del tiempo de fractura

La detección del instante en el que comienza la propagación de la fisura es de gran importancia en la determinación de la tenacidad de fractura dinámica de iniciación, K_{I_d} . La mayoría de los investigadores utilizan una banda extensométrica situada cerca del extremo de la fisura para detectar este instante^[36 y 72]. La banda registrará una cierta deformación hasta el momento en el que se produzca la propagación de la fisura, instante en el que en la banda se producirá una caída de dicha deformación. También se pueden usar bandas de hilo colocadas sobre la fisura para detectar el instante en el que comienza la propagación^[37]. En ocasiones se ha utilizado un procedimiento consistente en magnetizar ligeramente la probeta, registrándose con un dispositivo apropiado la variación del campo magnético que se produce cuando la fisura empieza a crecer^[72 y 82].

Para la determinación del instante en el que se inicia la propagación de la fisura en ensayos de flexión en un punto, Giovanola^[77] propone utilizar el método basado en la colocación de bandas extensométricas cerca del extremo de la fisura, siempre y cuando el tiempo que transcurre desde que comienza el proceso de carga hasta que se inicia la propagación, sea mayor de 50 μ s. Cuando el tiempo hasta fractura es menor de los citados 50 μ s, Giovanola^[77] recomienda la utilización de un método basado en la comparación de la evolución del factor de intensidad de tensiones (obtenido por algún procedimiento numérico o analítico) con el obtenido experimentalmente.

4. Influencia de la velocidad de deformación en K_{I_d}

Varios investigadores han puesto de manifiesto que en materiales como, por ejemplo, los aceros estructurales, cuando la rotura es de tipo frágil, la tenacidad de fractura disminuye cuando aumenta

la velocidad de sollicitación^[83 y 84]. Este hecho no se puede explicar recurriendo exclusivamente a modelos basados en la Mecánica de Medios Continuos, sino que requiere conocer los micromecanismos que desencadenan la rotura en cada caso. Un modelo clásico aplicable a los citados materiales (aceros estructurales con rotura frágil) es el conocido como RKR^[85], según el cual, en un sólido que contiene una fisura, ésta comenzará a propagarse cuando la tensión principal máxima supere una tensión crítica, σ_f , a una cierta distancia del extremo de la fisura, distancia que está relacionada con características microestructurales del material.

Por otra parte, alrededor del extremo de la fisura se forma una zona plástica (recuérdese que la solución elástica lineal predice tensiones y deformaciones infinitas en el mismo extremo de la fisura), dentro de la cual las tensiones y las deformaciones se pueden describir utilizando las soluciones de Hutchinson^[86] y Rice y Rosengren^[87] (modelo HRR). Aplicando el criterio local de rotura, antes mencionado (modelo RKR), a dicha solución tensional, Klepaczco^[88] ha establecido que el factor de intensidad de tensiones en el momento en que la fisura empieza a propagar, K_c (K_{IC} en el caso estático y K_{Id} en el caso dinámico), se puede obtener a partir de la expresión:

$$K_c \approx \left(\frac{\sigma_f}{\sigma_y} \right)^{\lambda(n)} \quad (24)$$

donde σ_f es la tensión crítica antes mencionada, σ_y es el límite elástico del material y $\lambda(n)$ es una función del coeficiente de endurecimiento por deformación del material, n . Hay evidencia experimental de que el límite elástico de los aceros estructurales aumenta con la velocidad de deformación, mientras que la tensión crítica, o es constante^[89] o aumenta en menor medida^[88]. Por lo tanto, con estas premisas y con la relación (24) se justifica la disminución de K_{Id} , observada en los aceros estructurales con rotura frágil, cuando aumenta la velocidad de sollicitación.

5. Consideraciones finales

En este trabajo se ha realizado una revisión de las técnicas experimentales que se utilizan para la determinación de las propiedades de fractura en condiciones dinámicas de materiales elásticos y lineales, con especial hincapié en la obtención de la tenacidad de fractura de iniciación, K_{Id} . Las inves-

tigaciones en este campo tienen un indudable interés, no sólo desde el punto de vista teórico, sino también desde el punto de vista tecnológico, dado que, en muchas de las modernas aplicaciones de los materiales de ingeniería, están presentes las sollicitaciones de tipo dinámico y, hasta el momento, no hay normativa para la realización de ensayos encaminada a la obtención de las propiedades de fractura en tales condiciones

Agradecimientos

Los autores desean expresar su agradecimiento a la Dirección General de Enseñanza Superior e Investigación Científica (DGESIC) por la financiación del Proyecto PB98-0027. También a D. Jesús Chao Hermida del Centro Nacional de Investigaciones Metalúrgicas por sus valiosos comentarios acerca del contenido de este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] V.Z. PARTON, *Dynamic Fracture Mechanics*, vol. 1, Ed. Taylor and Francis, Londres, Reino Unido, 1989.
- [2] V.Z. PARTON, *Dynamic Fracture Mechanics*, vol. 2, Ed. Taylor and Francis, Londres, Reino Unido, 1990.
- [3] L.B. FREUND, *Dynamic Fracture Mechanics*, Ed. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido, 1990.
- [4] M.F. KANINEN y C.H. POPELAR, *Advanced Fracture Mechanics*, Ed. Oxford University Press, Oxford, Reino Unido, 1985.
- [5] T.L. ANDERSON, *Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications*, Ed. CRC Press, Boca Ratón, 1995.
- [6] M. ADDA-BEDIA, R. ARIAS, M. BEN AMAR y F. LUND, *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999) 2314-2317.
- [7] G. OLEAGA, Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, 2000.
- [8] ASTM E 399-90. *Standard Test Method for Plain-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials*. Annual Book of ASTM Standards, vol. 03.01. 1994.
- [9] ASTM E 813-89. *Standard Test Method for J_{IC} . A Measure of Fracture Toughness*. Annual Book of ASTM Standards, vol. 03.01. 1994.
- [10] K.H. SCHALWE, N.K. NEALE y J. HEERENS, *The GKSS test procedure for determining the fracture behaviour of materials*, EFAM GTP 94, GKSS Report 94/E/60, 1994.
- [11] L. ANDRADE, Tesis Doctoral, Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla, 1999.
- [12] L.B. FREUND y R.J. CLIFTON, *J. Elasticity* 4 (1974) 293-299.
- [13] F. NILSSON, *J. Elasticity* 4 (1974) 73-75.
- [14] T. NISHIOKA y S.N. ATLURI, *Eng. Fract. Mech.* 18 (1983) 1-22.
- [15] L.B. FREUND, *J. Elasticity* 2 (1972) 341-349.

- [16] B.V. KOSTROV, *Int. J. Fract.* 11 (1975) 47-56.
- [17] R. BURRIDGE, *Int. J. Eng. Sci.* 14 (1976) 723-734.
- [18] L.R.F. ROSE, *Proc. R. Soc. London, Ser. A:* 349 (1976) 497-521.
- [19] C. ATKINSON y J.D. ESHELBY, *Int. J. Fract. Mech.* 4 (1968) 3-8.
- [20] SIH, G.C., *Inelastic Behaviour of Solids*, Ed. McGraw-Hill, New York, USA, 1970, pp. 607-633.
- [21] B. MORAN y C.F. SHIH, *Int. J. Fract.* 35 (1987) 295-310.
- [22] J.R. RICE, *J. Appl. Mech.* 35 (1968) 379-386.
- [23] J.W. CRAGGS, *J. Mech. Phys. Solids* 8 (1960) 66-75.
- [24] J.D. ACHENBACH, Z.L. LI y N. NISHIMURA, *Int. J. Fract.* 27 (1985) 215-227.
- [25] L.B. FREUND y Y.J. LEE, *Int. J. Fract.* 42 (1990) 261-276.
- [26] M. MARDER y S. GROSS, *J. Mech. Phys. Solids* 43 (1995) 1-48.
- [27] P. GUMBSCH, S.J. ZHOU y B.L. HOLIAN, *Phys. Rev. B:* 55 (1997) 3445-3455.
- [28] L.B. FREUND, *J. Mech. Phys. Solids* 20 (1972) 129-140.
- [29] L.B. FREUND, *J. Mech. Phys. Solids* 20 (1972) 141-152.
- [30] L.B. FREUND, *J. Mech. Phys. Solids* 21 (1973) 47-61.
- [31] ASTM E 1221-88. *Standard Test Method for Determining Plain-Strain Crack-Arrest Toughness, K_{Ia} , of Ferritic Steels*. Annual Book of ASTM Standards. Vol. 03.01. 1994.
- [32] J.F. KALTHOFF, J. BEINERT y S. WINKLER, *ASTM STP 627, Am. Soc. Test Mater.*, Philadelphia, USA, 1977, pp. 161-176.
- [33] H. COUQUE, C.P. LEUNG y J.R. HUDAK, *Eng. Fract. Mech.* 47 (1994) 249-267.
- [34] P.H. BEGUELIN, C. FOND y H.H. KAUSCH, *Int. J. Fract.* 89 (1988) 85-102.
- [35] C. RUIZ y R.A.W. MINES, *Int. J. Fract.* 29 (1985) 101-109.
- [36] T. YOKOYAMA, *J. Pressure Vessel Tech.* 115 (1993) 389-397.
- [37] L. RUBIO, Tesis Doctoral, Escuela Politécnica Superior, Universidad Carlos III de Madrid, 1999.
- [38] L.S. COSTIN, W.L. SERVER y J. DUFFY, *J. Eng. Mater. Technol.* 101 (1979) 168-172.
- [39] A. ANDRZEJEWSKI, J. KLEPACZKO y G. PLUVINAGE, *J. Mec. Appliquée* 5 (1981) 345-366.
- [40] J. KLEPACZKO, *J. Eng. Mater. Technol.* 104 (1982) 29-35.
- [41] R. CLOS, U. SCHREPPPEL, U. ZENCKER y T. RAHMEL, *Dynamic Failure of Solids: Theory, Experiments and Numerics*, Ed. Elsevier Applied Science, Londres, Reino Unido 1991 pp. 26-39.
- [42] H. MAIGRE y D. RITTEL, *Int. J. Solids Struct.* 30 (1993) 3223-3244.
- [43] H. MAIGRE y D. RITTEL, *Int. J. Fract.* 73 (1995) 67-79.
- [44] J.G. WILLIAMS, *Int. J. Fract.* 33 (1987) 47-59.
- [45] A.G. DUTTON y R.A.W. MINES, *Int. J. Fract.* 51 (1991) 187-206.
- [46] P.R. MARUR, K.R.Y. SIMHA y P.S. NAIR, *Int. J. Fract.* 68 (1994) 261-273.
- [47] P.R. MARUR y P.S. NAIR, *Eng. Fract. Mech.* 53 (1996) 481-491.
- [48] S. SAHRAOUI y F. GUILLAIZEAU, *Eng. Fract. Mech.* 33 (1989) 871-876.
- [49] G.E. NASH, *Int. J. Fract. Mech.* 5 (1969) 269-286.
- [50] K. KISHIMOTO, S. AOKI y M. SAKATA, *Eng. Fract. Mech.* 13 (1980) 501-508.
- [51] K. KISHIMOTO, K. KURODA, S. AOKI y M. SAKATA, *Proc. ICF6*, vol. 5, Nueva Delhi, India, S.R. Valluri, D.M.R. Taplin; P. Rama-Rao; J.F. Knott y R. Dubey (Eds.), Pergamon, Oxford, Reino Unido, 1984, pp 3177-3184.
- [52] L. RUBIO, J. FERNÁNDEZ-SÁEZ y C. NAVARRO, *An. Mec. Fract.*, 16 (1999) 275-280.
- [53] B.A. CROUCH, *Comput. Struct.* 48 (1993) 167-173.
- [54] L. RUBIO, J. FERNÁNDEZ-SÁEZ y C. NAVARRO, *An. Mec. Fract.*, 15 (1998) 97-101.
- [55] W.G. GUO, Y.L. LI y Y.Y. LIU, *Theor. Appl. Fract. Mech.* 26 (1997) 29-34.
- [56] T. NISHIOKA, M. PERL y S.N. ATLURI, *J. Pressure Vessel Technol.* 105 (1983) 124-131.
- [57] W. BRADLEY y A.S. KOBAYASHI, *Exp. Mech.* 10 (1970) 106-113.
- [58] J.W. DALLY, *Exp. Mech.* 19 (1979) 349-361.
- [59] R.J. SANDFORD y J.W. DALLY, *Eng. Fract. Mech.* 11 (1979) 621-633.
- [60] T. KOBAYASHI y J.W. DALLY, *ASTM STP 711*, American Society of Testing and Materials, Philadelphia, USA, 1980, pp. 189-210.
- [61] A. SHUKLA, R.K. AGARWAL y H. NIGAM, *Eng. Fract. Mech.* 31 (1988) 501-515.
- [62] P. MANNING, *Proc. Int. Conf. Phys. Non-Crystalline Solids*, Delft, Holanda (1964) pp. 481-490.
- [63] P.S. THEOCARIS, *J. Appl. Mech.* 37 (1970) 409-415.
- [64] J. BEINERT y J.F. KALTHOFF, *Mechanics of Fracture*, vol. 7, Ed. Martinus Nijhoff, La Haya, Holanda (1981) pp. 281-330.
- [65] J.F. KALTHOFF, *Proc. Int. Conf. Exp. Analysis* 1982, pp. 1119-1126.
- [66] A.J. ROSAKIS y L.B. FREUND, *J. Eng. Mater. Technol.* 104 (1982) 115-125.
- [67] L. ANDRADE y F.G. BENÍTEZ, *An. Mec. Fractura*, 15 (1998) 138-143.
- [68] J.R. BERGER, J.W. DALLY y R.J. SANDFORD, *Eng. Fract. Mech.* 36 (1990) 285-288.
- [69] S.K. KHANNA y A. SHUKLA, *Eng. Fract. Mech.* 51 (1995) 933-948.
- [70] A.T. ZHENDER y A.J. ROSAKIS, *Experimental Techniques in Fracture*, Ed. VCH, Nueva York, 1993, pp. 125-169.
- [71] J.A. JOHNSON, *Experimental Techniques in Fracture*, Ed. VCH, Nueva York, 1993, pp. 171-217.
- [72] J.F. KALTHOFF, *ASM Metals Handbook*, vol. 8, Mechanical Testing. American Society for Metals, Estados Unidos, 1985, pp. 269-271.
- [73] W. BÖHME, *ASTM STP 1074*, American Society of Testing and Materials, Philadelphia, USA, 1990, pp. 144-156.

- [74] W. BÖHME, *Impact and Dynamic Fracture of Polymers and Composites*,ESIS, Londres, Reino Unido 1995, pp.59-71.
- [75] I.V. ROKACH, *Fatig. Fract. Eng. Mater. Struct.* 21 (1998) 1007-1014.
- [76] I.V. ROKACH, *Fatig. Fract. Eng. Mater. Struct.* 21 (1998) 1015-1026.
- [77] J.H. GIOVANOLA, *ASM Metals Handbook*, vol. 8 Mechanical Testing. American Society for Metals, Estados Unidos, 1985, pp. 271-276.
- [78] J.H. GIOVANOLA, *ASTM STP 905*, American Society of Testing and Materials, Philadelphia, USA, 1986, pp. 307-328.
- [79] H. WADA, M. SEIKA, C.A. CALDER y T.C. KENNEDY, *Eng. Fract. Mech.* 46 (1993) 715-719.
- [80] J.H. GIOVANOLA, R.W. KLOPP y S.W. KIRKPATRICK, *J. Test. Eval.* (1998) 79-81.
- [81] K. KISHIMOTO, Y. FUJINO, S. AOKI y M. SAKATA, *JSME Int. J.* 33 (1990) 51-56.
- [82] G.B. LENKEY y S. WINKLER, *Fatig. Fract. Eng. Mater. Struct.* 20 (1997) 143-150.
- [83] J.M. BARSOM, *Eng. Fract. Mech.* 7 (1975) 605-618.
- [84] J.R. KLEPACZKO, *J. Eng. Mater. Technol.* 104 (1982) 29-35.
- [85] R.O. RITCHIE, J.F. KNOTT y J.R. RICE, *J. Mech. Phys. Solids* 21 (1973) 395-410.
- [86] J.W. HUTCHINSON, *J. Mech. Phys. Solids* 16 (1968) 13-31.
- [87] J.R. RICE y G.F. ROSENGREEN, *J. Mech. Phys. Solids* 16 (1968) 1-12.
- [88] J.R. KLEPACZKO, *J. Phys.* C5 8 (1985) C5245-C5250.
- [89] V. TVERGAARD y A. NEEDLEMAN, *Int. J. Fract.* 59 (1993) 53-67.