

# Simulación de la fluencia en caliente de un acero microaleado con un contenido medio de carbono<sup>(\*)</sup>

## III parte. Ecuaciones constitutivas

J.M. Cabrera<sup>(\*)</sup>, A. Al Omar<sup>(\*)</sup> y J.M. Prado<sup>(\*)</sup>

**Resumen** Siguiendo el planteamiento teórico efectuado en la I parte de este trabajo, se determinaron las ecuaciones constitutivas del comportamiento a la deformación en caliente de un acero comercial microaleado con un contenido medio de carbono. Para este objetivo se emplearon los ensayos de compresión uniaxial en caliente ya descritos en la II parte, los cuales se efectuaron en un rango de cinco órdenes de magnitud en velocidad de deformación y 300 °C de temperatura. Se comparan los resultados experimentales con el modelo teórico introducido en la I parte y se verifica que el error es inferior al 10 %. Se comprobó que la clásica ecuación del seno hiperbólico podía describir con precisión el comportamiento observado siempre y cuando las tensiones se normalicen por el módulo de Young, las velocidades de deformación por el coeficiente de autodifusión de la austenita, y se considere un efecto adicional sobre la tensión cuando el tamaño de grano inicial sea suficientemente fino.

Palabras clave: **Modelización. Fluencia en caliente. Deformación. Ecuaciones constitutivas. Acero microaleado.**

## Simulation of the hot flow behaviour of a medium carbon microalloyed steel

### Part 3. Constitutive equations

**Abstract** According to the part 1 of this work the constitutive equations of the hot flow behaviour of a commercial microalloyed steel have been obtained. For this purpose, the uniaxial hot compression tests described in the part 2 were employed. Tests were carried out over a range of 5 orders of magnitude in strain rate and 300 °C of temperature. Experimental results are compared with the theoretical model introduced in the first part of this study. It is concluded that deviations between experimental and theoretical curves are lower than 10 %. It is shown that the classical hiperbolic sine constitutive equation described accurately the experimental behaviour provided that stresses are normalized by the Young's modulus and strain rates by the self-diffusion coefficient. An internal stress must also be introduced in the latter equation when the initial grain size is fine enough.

Keywords: **Modelling. Hot flow. Deformation. Constitutive equations. Microalloyed steel.**

## 1. INTRODUCCIÓN

En la I parte de este trabajo, se planteó el marco básico de las ecuaciones constitutivas que gobiernan la fluencia en caliente de materiales metálicos. Asimismo, se señaló la importancia de poder efectuar modelizaciones de cara a la simulación de las posibles microestructuras que se podrían obtener. En esta III y última parte del estudio se procede a

una determinación experimental de las ecuaciones anteriores para el caso de un acero comercial microaleado con un contenido medio de carbono. A tal objeto, se utilizarán los mismos ensayos descritos en la II parte de este estudio, donde, asimismo, se reportan las condiciones experimentales y la denominación de las mismas.

## 2. DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN CINÉTICA PARA $\sigma_p$

La plasticidad de los materiales metálicos a alta temperatura depende de la velocidad de

<sup>(\*)</sup> Trabajo recibido el día 12 de junio de 1996.  
<sup>(\*)</sup> Dpto. de Ciencia de Materiales e Ingeniería Metalúrgica. Universidad Politécnica de Cataluña. Avda. Diagonal, 647. 08028-Barcelona (España).

deformación. Tal plasticidad está controlada, en términos generales, por el deslizamiento y el ascenso de dislocaciones. La descripción clásica del comportamiento a fluencia en condiciones de conformado en caliente o *creep* emplea una expresión similar a la ecuación [9.I]. Las constantes involucradas en dicha expresión suelen considerarse como “aparentes” porque no se tiene en cuenta el estado microestructural inicial y/o actual. Sin embargo, como en el caso del presente estudio, cuando las condiciones iniciales de ensayo son diferentes, tal efecto debe, cuando menos, considerarse.

Debido al interés en determinar la dependencia de las tensiones máximas,  $\sigma_p$ , con la velocidad de deformación y temperatura (ecs. [23.I] a [26.I]), fueron aquellos valores de tensión los que se consideraron en la ecuación [9.I], independientemente de si correspondían a un máximo de recrystalización o a un estado de saturación por restauración.

En la figura 1 se muestran las tensiones anteriores, obtenidas de todos los ensayos experimentales,

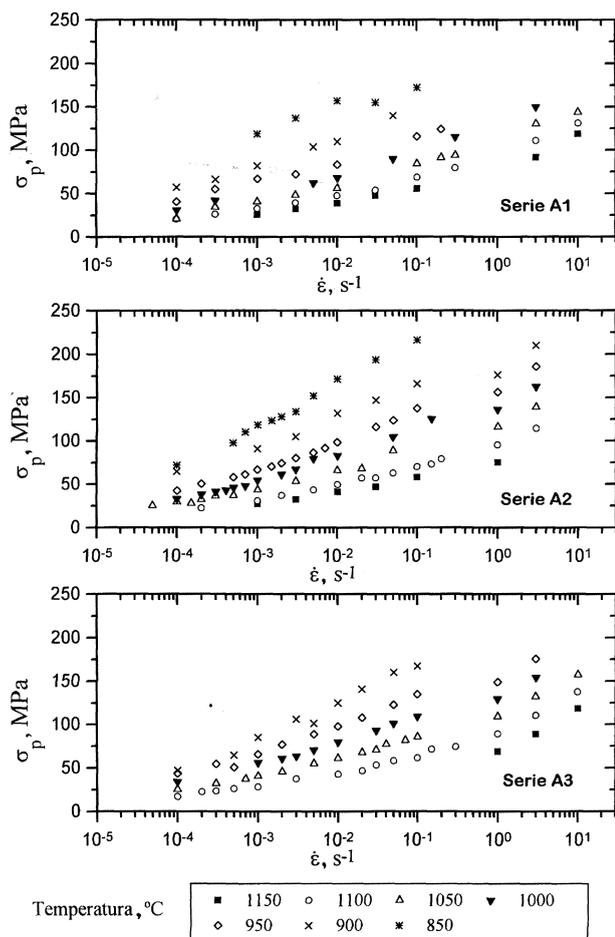


FIG. 1.— Evolución de  $\sigma_p$  (o tensión máxima) con la velocidad de deformación para todas las series de ensayos.

FIG. 1.— Evolution of  $\sigma_p$  (maximum stress) with strain rate for each test series.

frente a la velocidad de deformación. En general, aunque son evidentes ligeras desviaciones, se observa un buen acuerdo entre los resultados determinados con tres máquinas de ensayos diferentes. También es aparente algo de dispersión en los datos obtenidos en una misma máquina, pero la tendencia general se mantiene. Debe notarse que en los ensayos a alta velocidad ( $\dot{\epsilon} > 1$ ), se introdujo una corrección en los valores de tensión para tener en cuenta los efectos de calentamiento adiabático (1). Los resultados mostrados en la figura 1 se ajustaron a la ecuación [9.I] mediante regresión por mínimos cuadrados. Sin embargo, no se obtuvieron soluciones satisfactorias cuando todas las temperaturas para cada condición de ensayo se incluían en el modelo de regresión. Si sólo se incluían ciertas temperaturas (por ej., las altas), entonces la solución era estable, pero se obtenían altas energías de activación, o altos exponentes  $n$ . Tal falta de acuerdo no es de extrañar, ya que la microestructura inicial no se tiene en cuenta en la ecuación anterior.

Algunos investigadores (2-5) han propuesto que la desviación de la energía de activación de la de autodifusión, y la desviación del exponente de *creep*  $n$ , de los valores teóricamente deducidos u observados (5-7), pueden explicarse teniendo en cuenta la variación del módulo de Young con la temperatura. Según esta formulación, la tensión debería normalizarse por el módulo de Young y la ecuación [9.I] quedaría como:

$$\frac{\dot{\epsilon}}{D(T)} = A''' \left( \operatorname{senh} \alpha \frac{\sigma_p}{E(T)} \right)^n \quad [1.III]$$

donde  $E(T)$  es el módulo de Young y  $D(T)$  puede considerarse como el coeficiente de autodifusión de la austenita, que a su vez puede expresarse como:

$$D(T) = D_0 \exp\left(\frac{-Q_{sd}}{RT}\right) \quad [2.III]$$

donde  $Q_{sd}$  es la energía de activación de autodifusión (270 kJ/mol para el Fe- $\gamma$ ). En este trabajo, los valores de  $D(T)$  y  $E(T)$  se tomaron de la referencia (5) e iguales a  $D(T) = 1,8 \cdot 10^5 \exp(-Q_{sd}/RT)$ , en  $m^2/s$ , y  $E(T) = 215.460 (1 - (0,91(T-300)/1.810))$  en MPa, expresándose la temperatura en K.

El uso de la ecuación [1.III] es más sencillo que el de la ecuación [9.I], pues los valores desconocidos se reducen a tres; esto es, a  $A'''$ ,  $\alpha$  y  $n$ . El siguiente paso es la determinación del exponente  $n$ . Como se comentó en la I parte, la expresión del seno hiperbólico es una combinación práctica de los diferentes comportamientos observados en fluencia en caliente. A bajas tensiones, la velocidad de deformación tiene una dependencia potencial con la tensión (ec. [7.I]) y a altas tensiones, esa dependencia cambia a exponencial (ec. [8.I]). El

exponente  $n$  puede entonces obtenerse de la pendiente de un gráfico  $\log \dot{\epsilon} - \log \sigma_p$  a bajas tensiones. Así, se obtuvo un valor de  $n \approx 5$  para todas las series de ensayos. En este trabajo se tomará un valor constante de  $n = 5$  pues es el mejor entero que se ajusta a los resultados y es uno de los valores frecuentemente reportado (5-7).

Asumiendo un valor constante del exponente  $n$ , la ecuación [1.III] se aplicó a todos los resultados como se muestra en la figura 2. Lo primero que debe destacarse de esta gráfica es el casi perfecto ajuste de los puntos de la serie A1 a una misma curva, aunque algunos datos de baja temperatura se desvían (lo cual se discutirá más adelante). Como todos los ensayos de la serie A1 se efectuaron con idéntica microestructura inicial, no se detecta efecto de la misma. Además, la temperatura de austenización en la serie A1 fue relativamente alta, por lo que se deben esperar grandes tamaños de grano, bajas fracciones de volumen de precipitados y baja densidad de dislocaciones. Se asumirá, por lo tanto, que no hay efecto de la microestructura inicial en esta serie, o que al menos es poco significativo. Se tomarán los resultados de la serie A1 como valores de referencia para las otras series de ensayo.

El segundo punto a remarcar en la figura 2, es la creciente dispersión, más allá de la región potencial, en los valores de las tensiones de las series A2 y A3. Para estas series, los puntos correspondientes a bajas temperaturas (desde 850 °C hasta 1.050 °C en la serie A2, y desde 900 °C hasta 1.000 °C en la serie A3), se desvían claramente de la tendencia que muestran a alta temperatura. Es evidente que en estos casos, el estado microestructural inicial afecta al comportamiento a la fluencia.

La tercera cuestión a destacar es la coincidencia entre los resultados de alta temperatura de las series A2 y A3 con todos los de la serie A1, proporcionando evidencia adicional a la hipótesis de que la microestructura inicial no tiene influencia cuando el tamaño de grano inicial es suficientemente grande y la fracción de volumen de precipitados y densidad de dislocaciones son adecuadamente bajas.

El mejor ajuste a la ecuación [1.III] para los resultados de la serie A1 (sin tener en cuenta los puntos de baja temperatura) dio un valor de la constante  $(A''')^{1/5} = 603$  y un valor del parámetro  $\alpha = 1.338$ . Este último es cercano a valores reportados ( $\approx 1.000$ ) para metales FCC (5).

En condiciones de *creep* también se ha informado sobre discrepancias en la ecuación [1.III], especialmente en aleaciones endurecidas por dispersión de partículas (8-11). En tales materiales, donde las partículas interactúan severamente con el comportamiento a la fluencia, se considera una tensión efectiva. Con este propósito se calcula una tensión interna  $\sigma_{op}$  que se introduce en la ecuación [1.III], de modo que resulta:

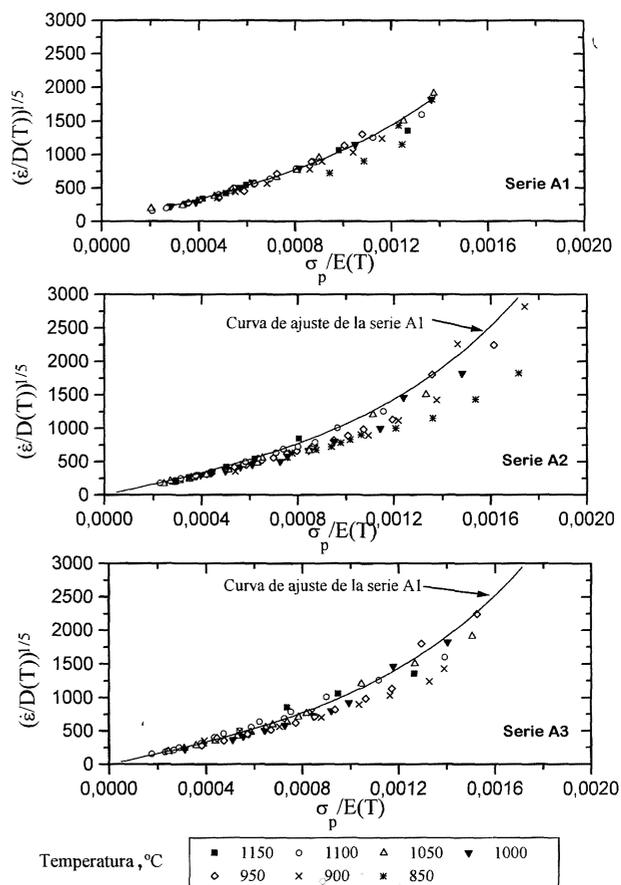


FIG. 2.— Representación de todos los valores de  $\sigma_p$  para cada serie de ensayo según la ecuación [1.III]

FIG. 2.— Representation of  $\sigma_p$  values for each test series according to equation [1.III].

$$\frac{\dot{\epsilon}}{D(T)} = A''' \left( \sinh \alpha \frac{(\sigma_p - \sigma_{op})}{E(T)} \right)^n \quad [3.III]$$

En este trabajo se propone una aproximación similar. Mediante la introducción de una tensión “interna” que refleje la estructura inicial, será posible obtener una expresión unificada para todos los resultados. Si se asume que los resultados de la serie A1 pueden tomarse como “libres” de las anteriores tensiones internas, la desviación mostrada por el resto de series puede atribuirse a estas tensiones internas. De este modo, los ensayos de baja temperatura de las series A2 y A3 se ajustaron a la ecuación [1.III] para determinar valores aparentes de  $A'''$  y  $\alpha$ . Dichas constantes se listan en la tabla I. El cálculo de la magnitud de estas tensiones internas es ahora relativamente fácil. Basta sustraer la tensión interna requerida para trasladar el punto experimental de la curva “aparente” a la curva de referencia o libre de tensiones internas (la de la serie A1). Las tensiones internas así calculadas se muestran en la figura 3. Puede observarse que son

TABLA I.— Valores de las constantes de la ecuación [1.III] para ensayos de baja temperatura de las series A2 y A3 y para el caso de tensiones de pico  $\sigma_p$

TABLE I.— Constants in equation [1.III] for low temperature tests of series A2 and A3, and for the case of peak stresses  $\sigma_p$

Serie	Temperatura, °C	(A''') <sup>1/5</sup>	$\alpha$
A2	1.050	506	1.376
A2	1.000	500	1.340
A2	950	495	1.315
A2	900	485	1.280
A2	850	480	1.250
A3	1.000	514	1.350
A3	950	504	1.345
A3	900	487	1.315

dependientes de la velocidad de deformación hasta un valor donde tienden a saturarse. También son claramente dependientes de la temperatura, disminuyendo cuando ésta aumenta.

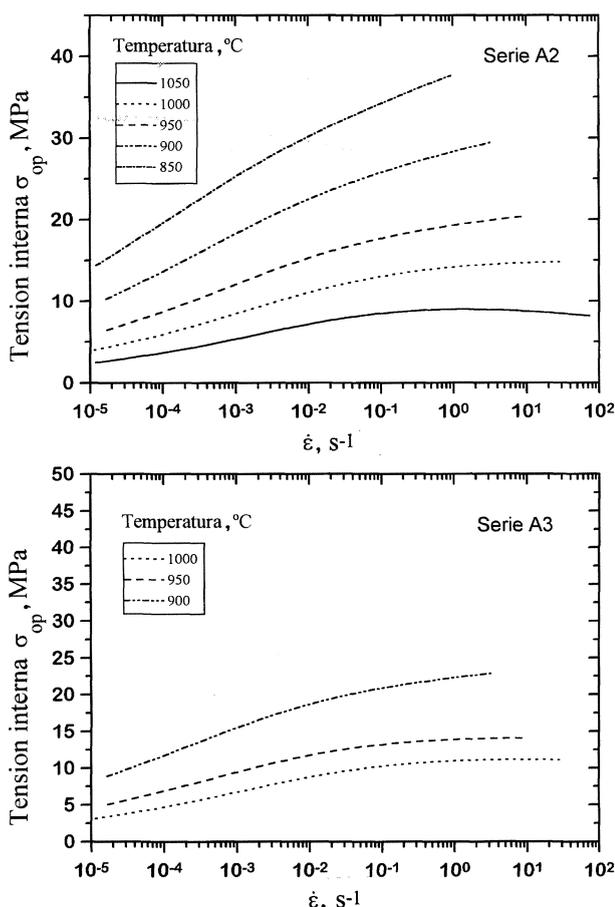


FIG. 3.— Tensiones internas calculadas frente a velocidad de deformación para las series de ensayos A2 y A3.

FIG. 3.— Calculated internal stresses against strain rate for A2 and A3 test series.

A primera vista, estas tensiones internas pueden estar reflejando el efecto del tamaño de grano inicial  $d_0$  (Fig. 6 de la parte II). Es claro que el tamaño de grano inicial de las condiciones de ensayo A2 y A3 sufre un cambio de un orden de magnitud cuando la temperatura de austenitización se incrementa desde 850 hasta 1.200 °C, y parece razonable pensar que esto debe afectar de algún modo al comportamiento a la fluencia. En la figura 4 se representa el valor de saturación de la tensión “interna” frente a la raíz cuadrada del tamaño de grano inicial, y puede observarse un buen acuerdo con la ecuación de Hall-Petch (ec. [4.III]):

$$\sigma_{op} = \sigma_{ip} + K(d_0)^{-1/2} \quad [4.III]$$

Esta última figura permite la determinación de la constante  $K$  de la ecuación de Hall-Petch porque es relativamente insensible a la temperatura y a la velocidad de deformación. Sin embargo, tal representación no permite la determinación de la tensión de fricción  $\sigma_{ip}$  (resistencia promedio de la red cristalina al movimiento de las dislocaciones) debido a que es fuertemente sensible a la temperatura, deformación y composición química (12). Aunque el efecto de endurecimiento por límites de grano durante la fluencia en caliente ha recibido muy poca atención hasta la fecha, se ha informado (13) de un valor de  $K = 5,5 \text{ MPa mm}^{1/2}$  para la austenita. Este valor es cercano al aquí determinado:  $K = 4,15 \text{ MPa mm}^{1/2}$ .

Si en lugar de analizar las tensiones “internas” de saturación se analizan las tensiones “internas” a una velocidad de deformación fija, se observa una clara dependencia del coeficiente  $K$  con la citada velocidad. Este efecto también ha sido registrado por Petkovic y col. (14) para el límite elástico en caliente del cobre. En una escala semilogarítmica

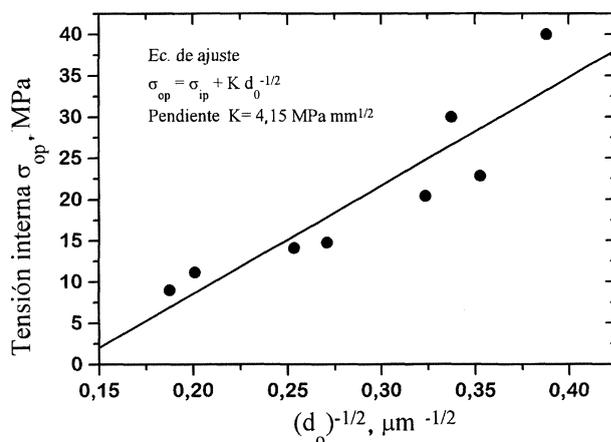


FIG. 4.— Dependencia de la tensión interna de saturación con el tamaño de grano inicial.

FIG. 4.— Dependence of the saturation internal stress on the initial grain size.

(Fig. 5), la relación entre  $K$  y  $\dot{\epsilon}$  es lineal, sugiriendo la siguiente relación empírica:

$$K = a + b \cdot \log \dot{\epsilon} \quad [5.III]$$

donde los valores de  $a$  y  $b$  estimados en este trabajo son 3,94 y 0,45 respectivamente. Estos valores son superiores a los reportados para el cobre (1,5 y 0,2) lo que indica que dependen del material considerado.

Aunque la correcta determinación física de  $\sigma_{ip}$  no fue posible en el presente caso, al menos se obtuvo una correlación empírica para una adecuada evaluación posterior de la tensión interna  $\sigma_{op}$ . Así, se determinó la siguiente expresión, en la que también existe una dependencia semilogarítmica con la velocidad de deformación:

$$\sigma_{ip} = -15,29 - 1,22 \log(\dot{\epsilon}) \quad [6.III]$$

La razón para la disminución del efecto del tamaño de grano sobre la tensión a bajas velocidades de deformación (Fig. 3) puede atribuirse al mecanismo de deformación operante. A bajas velocidades de deformación, la escalada de dislocaciones es significativa, mientras que el mecanismo cambia a deslizamiento de dislocaciones a moderadas y altas velocidades de deformación. Desde esta óptica es de esperar que el mecanismo de deformación sea más sensible al tamaño de grano, pues los límites de grano pueden considerarse como barreras al movimiento de las dislocaciones.

De acuerdo con los resultados registrados no hay evidencia de una fuerte influencia de los precipitados o de la inicial densidad de dislocaciones. Aunque los precipitados pueden tener un efecto indirecto controlando el tamaño de grano inicial, parece claro que no afectan directamente al comportamiento

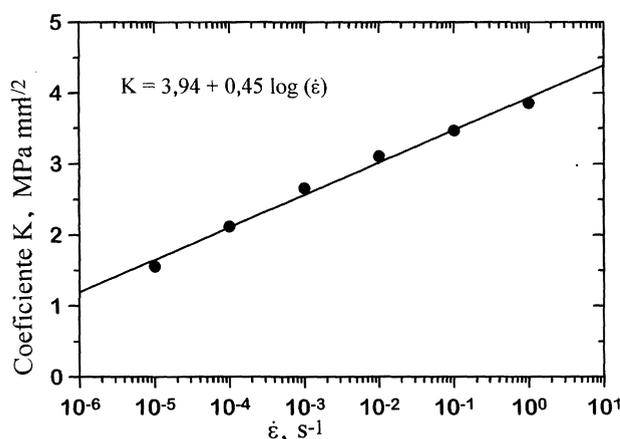


FIG. 5.— Dependencia con la velocidad de deformación del coeficiente  $K$  de la ecuación de Hall-Petch.

FIG. 5.— Dependence of the coefficient  $K$  in the Hall-Petch equation on the strain rate.

to a la fluencia. En estudios realizados por los autores (15) se verificó que para las fracciones de volumen de precipitados presentes, a alta temperatura, las tensiones de endurecimiento que estos producirían son prácticamente despreciables. De este modo, deberían tener un efecto reducido sobre el endurecimiento de la matriz. Con respecto a los puntos que se desvían de la tendencia general en la serie A1, debe notarse que se corresponden con temperaturas (900 y 850 °C) en las cuales tiene lugar la precipitación dinámica de un complejo carbonitrúro de vanadio-titanio, temperatura que coincide con la nariz de las curvas PTT (precipitación-temperatura-tiempo) obtenidas para aceros similares aunque con menor contenido de carbono (16 y 17). La aparición de esta precipitación dinámica puede explicar el incremento en la tensión de fluencia observado a velocidades de deformación relativamente bajas (la precipitación tiene lugar antes del pico de tensión) y la ausencia de este efecto a mayores velocidades (la precipitación tiene lugar después). La precipitación dinámica es general y tiene lugar en toda la matriz y no sólo en los límites de grano.

La observación de que la densidad inicial de dislocaciones no ejerce un importante efecto sobre el comportamiento a la fluencia, parece razonable si se piensa que la densidad inicial cambia rápidamente una vez que comienza la deformación, evolucionando hacia la densidad impuesta por la temperatura y velocidad del ensayo. La comparación de las tensiones de endurecimiento, debidas al tamaño de grano inicial en los resultados de las series A2 y A3, no revela diferencias apreciables, por lo que cabe concluir que el crecimiento de los precipitados (lo que diferenciaba ambas series) no tiene una influencia directa sobre el comportamiento a la fluencia, aunque de nuevo puede afectar indirectamente a través del tamaño de grano inicial.

Finalmente, en la figura 6 se representan todos los valores de tensión pico o máxima según la ecuación [3.III] considerando las tensiones "internas" apropiadas. Es evidente que la dispersión que aparecía en la figura 2 ha disminuido notablemente, mostrando la importancia de incluir el efecto del tamaño de grano inicial en la ecuación constitutiva cuando aquél es suficientemente fino.

### 3. DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN CINÉTICA PARA $\sigma_{ss}$ Y EFECTO DEL TAMAÑO DE GRANO RECRISTALIZADO

La ecuación [3.I] muestra también la necesidad de determinar una ecuación cinética para la tensión de estado estable  $\sigma_{ss}$  de cara a una adecuada modelización de la curva de fluencia. Como ya se comentó en la I parte, la citada tensión admite un

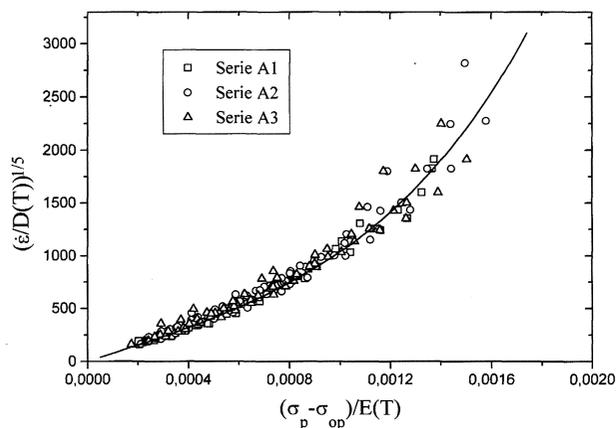


FIG. 6.— Representación de todos los valores de  $\sigma_p$  en un mismo gráfico incluyendo el efecto del tamaño de grano inicial a través de la apropiada tensión “interna”.

Fig. 6.— Representation in the same plot of all the  $\sigma_p$  values including the effect of the initial grain size through the appropriated “internal” stress.

tratamiento idéntico al dado en el apartado anterior para  $\sigma_p$ . Sin embargo, y dados los resultados obtenidos anteriormente, surgen algunas preguntas, especialmente si el tamaño de grano recristalizado dinámicamente tendrá un efecto similar en  $\sigma_{ss}$  como el tamaño de grano inicial lo tiene en  $\sigma_p$ .

La figura 7 muestra la evolución de  $\sigma_{ss}$  con la velocidad de deformación y temperatura para cada condición de ensayo. De nuevo se efectuaron correcciones en los valores de tensión correspondientes a ensayos de alta velocidad. En la figura 8 se muestran los resultados anteriores, representados sobre una base similar a la de la ecuación [3.III]. Al igual que ocurría con las tensiones  $\sigma_p$  para la serie A1, todos los puntos se agrupan en una misma curva (excepto los de 850 °C a baja velocidad de deformación por los motivos ya comentados), y se obtuvieron los siguientes valores de las constantes características:  $(A''')^{1/5} = 813$  y  $\alpha = 1.168$ . La figura 8 muestra, también, que no todos los datos de las series A2 y A3 se alinean sobre la misma curva de ajuste anteriormente determinada, de un modo similar a como ocurría con  $\sigma_p$ . Una posible explicación sería asumir que tal falta de ajuste, equivalente de nuevo a considerar una tensión “interna”, se debe de alguna manera a los precipitados presentes en las series de ensayos A2 y A3, pues es lo único que las diferencia de la serie de ensayos A1. En la figura 9 se muestra que las tensiones “internas”  $\sigma_{oss}$ , que en este caso cabría considerar, son de nuevo dependientes con la velocidad de deformación y, por regla general, inferiores a las determinadas para  $\sigma_{op}$ . (Las tensiones “internas”  $\sigma_{oss}$  se determinaron de manera similar a como se hizo para  $\sigma_p$ . La tabla II lista los valores aparentes de  $A'''$  y  $\alpha$  para los casos considerados).

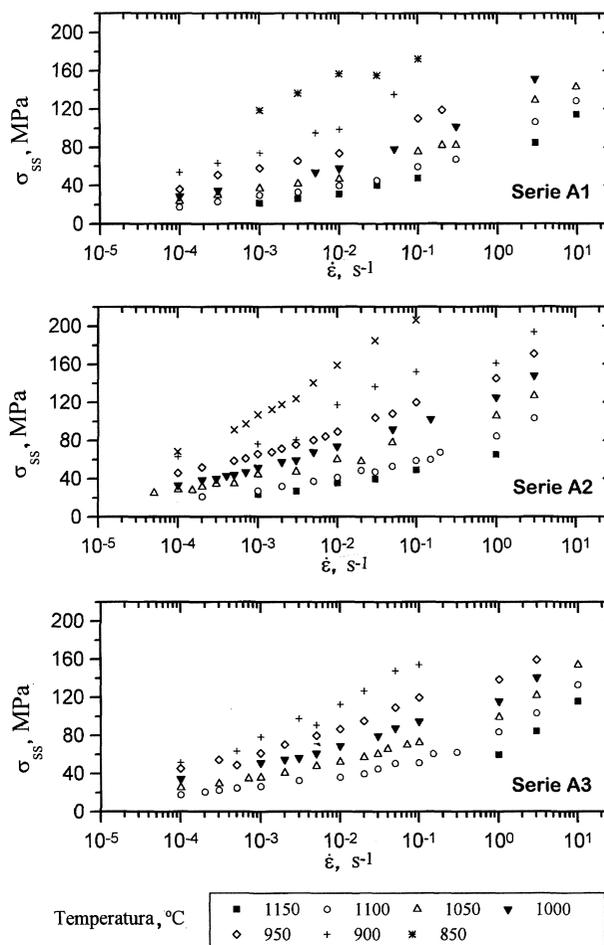


FIG. 7.— Representación de la evolución de  $\sigma_{ss}$  frente a la velocidad de deformación para todas las series de ensayos.

Fig. 7.— Representation of the dependence on strain rate of  $\sigma_{ss}$  for all test series.

De nuevo cabe pensar en que el efecto de los precipitados es indirecto. No están endureciendo la matriz, pero sí están limitando el tamaño de grano recristalizado. Esto se ve claramente en la figura 10 donde se representa la relación “universal” de Derby y col. (18-20) entre  $\sigma_{ss}$  normalizada por la tensión de cizalladura y el tamaño de grano recristalizado normalizado por el vector de Burgers de la austenita ( $2,58 \cdot 10^{-10}$  m) según la ecuación [5.I]. De hecho, se representa la tensión  $\sigma_{ss}$  efectiva, es decir, descontados los efectos de las tensiones internas. La dependencia encontrada en la figura 10 para la serie de ensayos A1, ensayos donde la recristalización dinámica progresa de una manera “libre”, es la habitualmente reportada en la bibliografía. El exponente del tamaño de grano recristalizado tiene un valor de 0,62, muy cercano al valor de 2/3 propuesto por Derby y col. La constante  $K_2$ , que oscila entre 1 y 10, en este caso vale 2,39. Sin embargo, esta figura muestra que las series de ensayos A2 y A3 no se ajustan al comportamiento anterior,

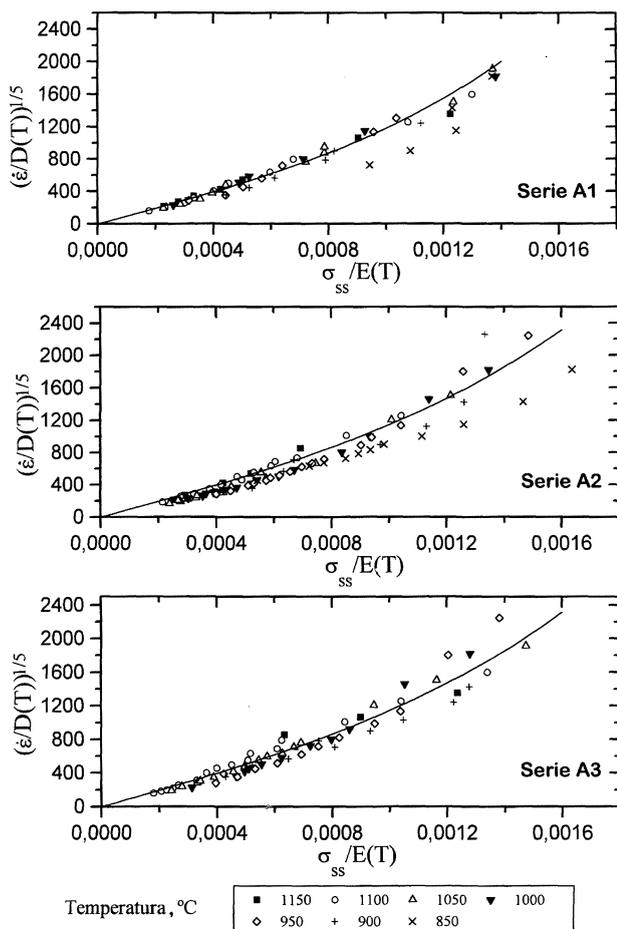


FIG. 8.— Representación de los resultados de  $\sigma_{ss}$  según la ecuación [1.III]. La curva de ajuste representada en las series A2 y A3 corresponde a la de la serie A1.

FIG. 8.— Representation of  $\sigma_{ss}$  results according to equation [1.III]. The fitting curve plotted on A2 and A3 series corresponds to that of the A1 series.

produciendo a altas tensiones (por ej., altas velocidades o baja temperatura) tamaños de grano más finos que en los ensayos de la serie A1. De hecho, los valores de los exponentes del tamaño de grano recrystalizado en la ecuación [5.I] difieren notablemente para las citadas dos series (0,367 y 0,42) del valor propuesto por Derby y col., queriendo indicar que, cuando la recrystalización dinámica progresa en presencia de una cantidad suficiente de precipitados, los tamaños de grano producidos son más finos que cuando tal progresión tiene lugar en una matriz libre de partículas. Probablemente, los precipitados refinan la propia estructura de granos, los cuales ofrecen obstáculos adicionales al movimiento de las dislocaciones. Es también evidente, en dicha figura, la presencia de una dispersión notable en los tamaños de grano recrystalizados, debido entre otros factores, a la imposibilidad de retener totalmente la estructura de granos recrystalizada dinámicamente una vez acaba-

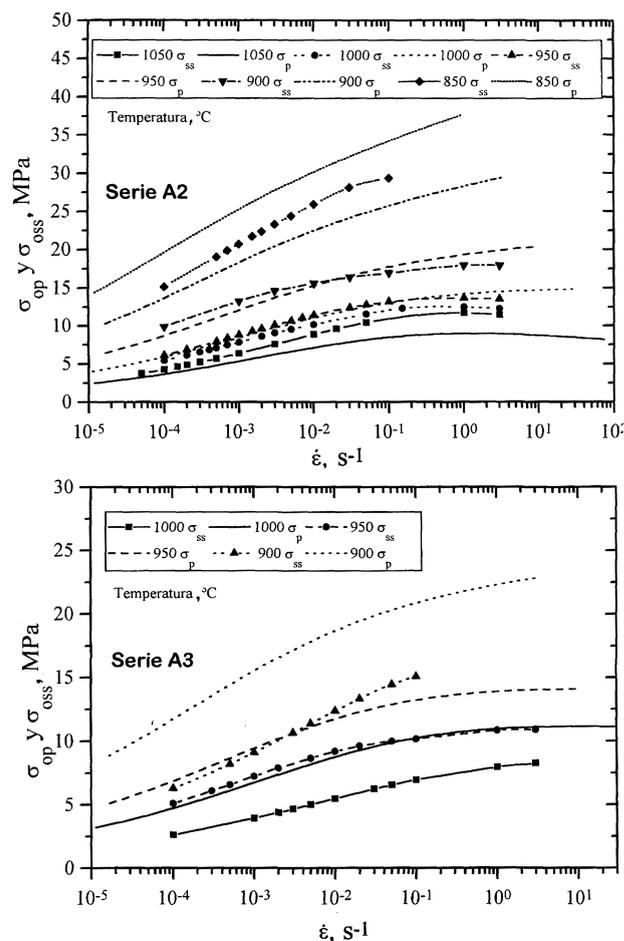


FIG. 9.— Comparación de las tensiones internas involucradas en la determinación de la ecuación cinética para  $\sigma_{ss}$  con las correspondientes a las de  $\sigma_p$ .

FIG. 9.— Comparison between the internal stresses involved in the determination of the rate equation for  $\sigma_{ss}$  and those of  $\sigma_p$ .

do el ensayo, y por lo tanto, a la presencia de granos recrystalizados metadinámica y/o estáticamente.

TABLA II.— Valores de las constantes de la ecuación [1.III] para ensayos de baja temperatura de las series A2 y A3, considerando valores de  $\sigma_{ss}$

TABLE II.— Constants in equation [1.III] for low temperature tests of series A2 and A3, and for the case of steady state stresses  $\sigma_{ss}$

Serie	Temperatura, °C	$(A''')^{1/5}$	$\alpha$
A2	1.050	623	1.256
A2	1.000	598	1.301
A2	950	661	1.205
A2	900	606	1.253
A2	850	667	1.106
A3	1.000	735	1.171
A3	950	665	1.230
A3	900	745	1.110

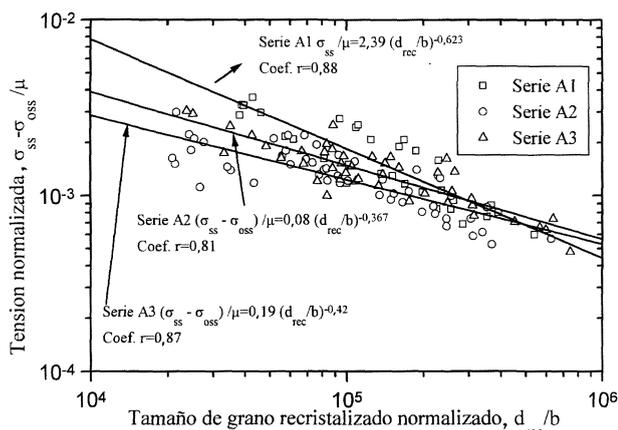


FIG. 10.— Dependencia de  $\sigma_{ss}$  con el tamaño de grano recrystallizado según la relación universal propuesta por Derby y col.

FIG. 10.— Dependence of  $\sigma_{ss}$  on the recrystallized grain size after the univaler relation proposed by Derby et al.

En la figura 11 se correlacionan las tensiones “internas”  $\sigma_{oss}$  con el tamaño de grano recrystallizado deducido según los valores de la ecuación [5.I]. De nuevo, salvo algunos puntos que se desvían de la tendencia general (correspondientes a la serie A2 a 850 °C) y que se comentarán más adelante, puede apreciarse que el comportamiento es explicable por una expresión de Hall-Petch, con los coeficientes deducidos en la ecuación [7.III]:

$$\sigma_{oss} = 3,5 + 0,751(d_{rec})^{-1/2} \quad [7.III]$$

donde  $d_{rec}$  está en mm.

Puede comprobarse que las constantes en la ecuación de Hall-Petch, especialmente  $K$ , así como

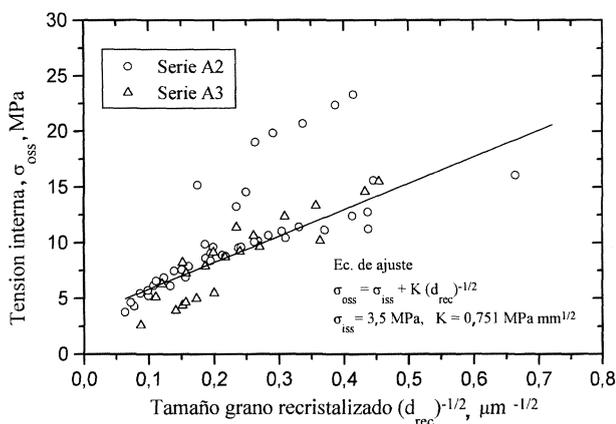


FIG. 11.— Correlación entre las tensiones internas  $\sigma_{oss}$  y el tamaño de grano recrystallizado. Ajuste a una ecuación de Hall-Petch.

FIG. 11.— Correlation between the internal stresses  $\sigma_{oss}$  and the recrystallized grain size. Fitting to the Hall-Petch equation.

las propias tensiones internas, son inferiores a las encontradas para el caso de  $\sigma_p$ , lo cual es lógico, pues el progreso de la recrystallización dinámica tiende a eliminar dislocaciones y a ablandar la estructura mucho más que en el caso de la restauración dinámica. También es notorio en esta figura que las tres series de ensayos tienden a unificarse a bajas tensiones (altas temperaturas y/o bajas velocidades de deformación), donde es de esperar que el efecto de interacción de los precipitados sobre la estructura desarrollada por la recrystallización dinámica sea poco significativo, al igual que ya ocurre con el propio tamaño de grano inicial. Finalmente, hay que indicar que la dependencia de las tensiones  $\sigma_{oss}$  con la velocidad de deformación queda englobada en la relación entre el tamaño de grano recrystallizado y  $\sigma_{ss}$ , por lo que la ecuación cinética para la tensión de estado estable se representaría como:

$$\left( \frac{\dot{\epsilon}}{D(T)} \right)^{1/5} = 813 \cdot \sinh \left( 1.168 \left( \frac{\sigma_{ss} - \sigma_{oss}}{E(T)} \right) \right) \quad [8.III]$$

Cuando  $d_{rec} > 30 \mu m$  (ó  $d_{rec}/b < 10^5$ ) la tensión  $\sigma_{oss}$  equivale a 0, y en caso contrario viene expresada por la ecuación [7.III]. Esta condición equivale a considerar los efectos de tamaño de grano en los ensayos de las series A2 y A3 a temperaturas inferiores a 1.050 °C, series en las que se apreció la necesidad de incluir esta tensión interna. En ese caso  $d_{rec}$  está relacionado con  $\sigma_{ss}$  según la ecuación

$$\frac{\sigma_{ss}}{\mu(T)} = 0,13 \left( \frac{d_{rec}}{b} \right)^{-0,395} \quad (d_{rec} < 30 \mu m) \quad [9.III]$$

En esta última expresión se han promediado los valores de las constantes obtenidas para las series A2 y A3, y  $d_{rec}$  está en unidades consecuentes con el vector de Burgers.

A modo de comparación, en la figura 12 se muestra como los valores de  $\sigma_{ss}$  se unifican al tener en cuenta el efecto de las correspondientes tensiones internas. En relación a los puntos experimentales que se desvían de la tendencia general en la dependencia del tamaño de grano recrystallizado con la tensión interna (Fig. 11), cabe notar que se corresponden con los ensayos de la serie A2 a 850 °C. En esas condiciones, es de esperar un efecto de endurecimiento por parte de las partículas precipitadas. A un hecho similar, aunque esta vez en condiciones de precipitación dinámica, se atribuyó la desviación de algunos valores de  $\sigma_p$  en ensayos de la serie A1 a 850 °C. En este sentido, ambos resultados son enteramente consistentes, y ponen de manifiesto que cuando la cantidad de precipitados es notable, como parece ocurrir a 850 °C en los aceros de este estudio, debe también considerarse un

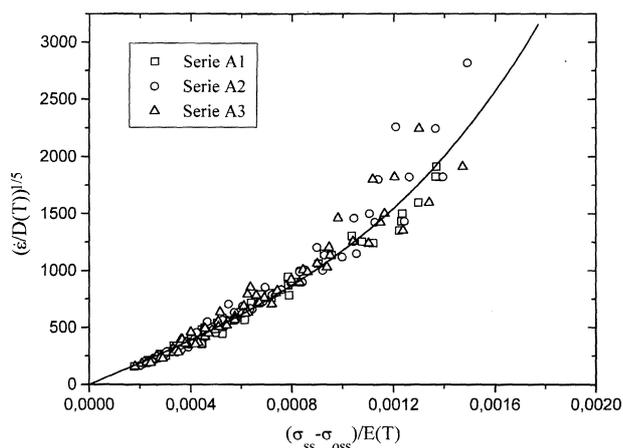


FIG. 12.— Idem a la figura 6 pero para los valores de  $\sigma_{ss}$  y el tamaño de grano recrystalizado.

FIG. 12.— Idem to figure 6 but for the  $\sigma_{ss}$  values and the recrystallized grain size.

incremento en la tensión de fluencia debido a las partículas presentes. Para reforzar la idea de que este efecto se debe a las partículas precipitadas, basta ver que los puntos “anómalos” de la figura son paralelos a la tendencia general, evidenciando que la tensión interna adicional a introducir (debida al endurecimiento por partículas) es también constante e independiente de  $d_{rec}$ , y por extensión de  $\dot{\epsilon}$  y  $t$ , lo cual es coherente con las teorías clásicas (12 y 21) de endurecimiento por precipitación, pues éste depende exclusivamente de la fracción en volumen y tamaños de las partículas (ambos aproximadamente constantes en los experimentos que nos ocupan). Cabe también decir que el efecto del endurecimiento sobre la tensión es aditivo y se puede superponer a otros efectos (como el aquí señalado del tamaño de grano), y que aunque no se incluya o estudie en este trabajo, se puede incorporar perfectamente en las ecuaciones constitutivas.

Para finalizar este apartado, cabe destacar que se observa que el coeficiente  $K$  en la ecuación de Hall-Petch disminuye una vez que comienza la recrystalización por efecto de la fracción de volumen de granos recrystalizados. Conforme la deformación aumenta y la recrystalización dinámica progresa y se completa, se aprecia que el coeficiente  $K$  deja de depender de la velocidad de deformación, volviéndose un valor constante y quedando la dependencia de la velocidad de deformación incluida en el tamaño de grano recrystalizado.

#### 4. MODELIZACIÓN DE LA ETAPA DE ENDURECIMIENTO Y RESTAURACIÓN DINÁMICA

Después del conjunto de ecuaciones desarrolladas anteriormente, sólo resta por determinar la

modelización del tramo inicial de la curva de fluencia, es decir, aquella parte de la curva donde los mecanismos involucrados son los de endurecimiento por deformación y ablandamiento por restauración dinámica. Con tal motivo, se utilizarán las ecuaciones [23.I] a [26.I]. Antes de proseguir debe hacerse un inciso, pues tales ecuaciones están pensadas para modelar la curva de fluencia cuando sólo interviene como mecanismo de ablandamiento la restauración dinámica, y es por ello que se hace referencia a una tensión de estado estable. En la práctica, y en la mayoría de ensayos efectuados, al coexistir la recrystalización dinámica no se llega a alcanzar ese estado de saturación por restauración dinámica. Sin embargo, como criterio práctico, y en lo que sigue, se supondrá que esta tensión de estado estable es coincidente con la tensión máxima alcanzada en la curva de fluencia (haya o no recrystalización dinámica). Un estudio más apropiado requeriría determinar tal tensión de saturación, lo cual se puede hacer a partir de curvas de velocidad de endurecimiento,  $\theta$ , frente a tensión. Los resultados de simulación finales mostrarán la bondad de esta hipótesis.

De las curvas experimentales, se determinó por el método de mínimos cuadrados los coeficientes de las ecuaciones [23.I] a [26.I], esto es,  $\sigma_0$ ,  $(\alpha' \mu b)^2 U$  y  $\Omega$ . Ello se efectuó sustrayendo las tensiones internas  $\sigma_{op}$  determinadas anteriormente, de modo que se tuvieron sólo en cuenta las tensiones efectivas. Asimismo, se comprobó que los valores determinados de  $\sigma_0$  podían despreciarse, lo cual es lógico pues  $\sigma_0$  equivale a la tensión inicial (antes de comenzar la deformación plástica) y es proporcional a la densidad inicial de dislocaciones, las cuales son claramente inferiores a las desarrolladas durante el proceso de conformado. En los ensayos de alta velocidad, los valores de los parámetros anteriores deben tomarse como indicativos, pues el efecto adiabático de calentamiento no se incluyó en la determinación de los coeficientes anteriores.

A continuación, se determinó la dependencia de  $U$  y  $\Omega$  con las condiciones de deformación. Es habitual considerar el término  $U$ , velocidad de generación de dislocaciones según el modelo de Estrin y Mecking (22), o velocidad a la que las dislocaciones móviles son inmovilizadas o aniquiladas según el modelo de Bergström (23), como una constante. Ello se entiende mejor con el planteamiento de Estrin y Mecking, pues la velocidad de generación de dislocaciones es proporcional a su recorrido libre medio. Si hay impedimentos geométricos (tales como partículas o tamaños de grano fino) es lógico que dicho término sea constante y en todo caso dependiente del obstáculo geométrico; en este caso, el tamaño de grano inicial, el cual está estrechamente vinculado a la densidad de partículas precipitadas. En la figura 13 se representa la

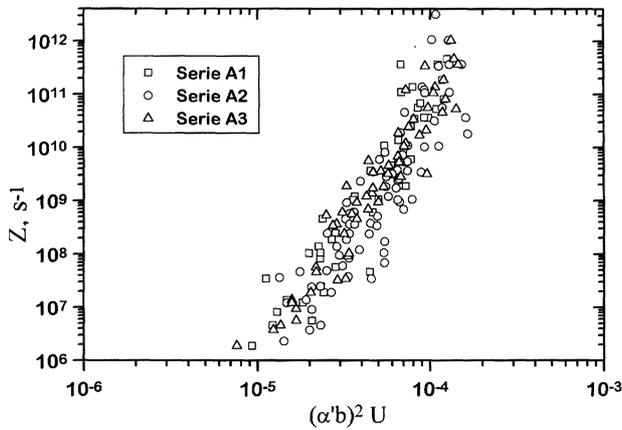


FIG. 13.— Dependencia de  $U$  con las condiciones de deformación (parámetro de Zener-Hollomon) para cada serie de ensayo.

FIG. 13.— Dependence of  $U$  on the deformation conditions (Zener-Hollomon parameter) for each test series.

evolución de  $(\alpha'b)^2U$  frente al parámetro de Zener-Hollomon ( $Q = 270$  kJ/mol). Es evidente que habiendo eliminado el efecto de la temperatura al dividir por  $\mu(T)$ , la dependencia de  $U$  con la velocidad de deformación y temperatura no es nula, aunque sí muy ligera, pues en seis órdenes de magnitud de  $Z$ , el término responsable del endurecimiento  $U$  cambia un sólo orden. Se observa también una ligera dependencia con el tamaño de grano inicial,  $d_0$ , responsable del aumento de dispersión a la hora de representar los datos de las series de ensayos A2 y A3. La figura 13 sugiere una relación como la ecuación [10.III]:

$$(\alpha' b)^2 U = K_U \cdot d_0^{n_U} \cdot Z^{m_U} \quad [10.III]$$

El ajuste efectuado por mínimos cuadrados proporcionó los siguientes valores de las constantes:  $K_U = 0,329 \cdot 10^{-5}$ ,  $n_U = -0,08$  y  $m_U = 0,144$ , con un coeficiente de correlación  $r^2 = 0,94$ . Los bajos valores de  $n_U$  y  $m_U$  corroboran la práctica constancia de  $U$ .

En la figura 14 se representa la dependencia con  $Z$  del término  $\Omega$  responsable del proceso de restauración dinámica en el modelo de Estrin y Mecking, o probabilidad de removilización o aniquilación de dislocaciones inmóviles en el modelo de Bergström. Está claro que de la primera definición puede pensarse que  $\Omega$  depende de la velocidad de deformación y de la temperatura, pues la restauración dinámica es un fenómeno activado térmicamente. De la figura anterior es aparente que los resultados de la serie A1 tienden a estar bien explicados sólo por  $Z$ , y que el resto de series de ensayo tienden a dispersarse. Para encontrar una ecuación explicativa de los valores de

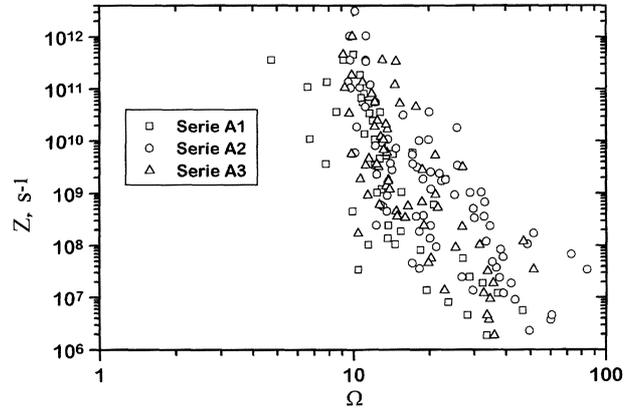


FIG. 14.— Dependencia de  $\Omega$  con las condiciones de deformación (parámetro de Zener-Hollomon) para cada serie de ensayo.

FIG. 14.— Dependence of  $\Omega$  on the deformation conditions (Zener-Hollomon parameter) for each test series.

$\Omega$  algunos autores (Yoshie y col. (24), Laasraoui y col. (1)), ajustaron el comportamiento observado a la siguiente ecuación:

$$\Omega = K_\Omega \cdot d_0^{n_\Omega} \cdot Z^{m_\Omega} \quad [11.III]$$

donde  $d_0$  es el tamaño de grano inicial en  $\mu\text{m}$ , y  $K_\Omega$ ,  $n_\Omega$  y  $m_\Omega$  son constantes dependientes del material. Se determinaron los parámetros anteriores por regresión por mínimos cuadrados y se obtuvieron los siguientes valores:  $K_\Omega = 1,829$ ,  $m_\Omega = -0,167$  y  $n_\Omega = -0,346$  (el coef. de regresión fue de  $r^2 = 0,85$ ). En la tabla III se comparan con valores recopilados en la bibliografía, siendo destacable la falta de acuerdo entre los exponentes propuestos y la menor discrepancia de resultados en el término  $m_\Omega$ .

### 5. COMPARACIÓN DEL MODELO CON LAS CURVAS EXPERIMENTALES

A continuación, se resume el conjunto de ecuaciones de modelización de la curva de fluencia para el acero de estudio.

El valor de deformación que indicará el inicio de recristalización dinámica es:

$$\epsilon_p = 7 \cdot 10^{-3} d_0^{0,146} Z^{0,137}$$

Si sólo hay restauración dinámica ( $\epsilon < \epsilon_p$ ):

$$\sigma^2 = \sigma_p^2 (1 - e^{-\Omega \epsilon})$$

donde la tensión de pico  $\sigma_p$  y  $\Omega$  valen :

Tabla III.— Valores de las constantes de la ecuación (11.III) según por autores.

Table III.— Constants reported by some authors for equation (11.III).

Acero	Referencia	$K_{\Omega}$	$n_{\Omega}$	$m_{\Omega}$	Q, kJ/mol
Contenido bajo en carbono, microaleado	1	157	–	–0,2	137.000
Cont. bajo en carbono, ligeramente aleado	24	37,2	0,0412	–0,0986	175.456
Contenido medio en carbono, microaleado	Este trabajo	1.829	–0,346	–0,167	280.000

$$\sigma_p = \left( \frac{E(T)}{1.338} \right) \operatorname{arcsenh} \left( \left( \frac{1}{603} \right) \left( \frac{\dot{\epsilon}}{D(T)} \right)^{1/5} \right) + \sigma_{op}$$

$$\Omega = 1.829 \cdot d_0^{-0,346} \cdot Z^{-0,167}$$

donde  $d_0$  se expresa en  $\mu\text{m}$ .

La tensión interna se aplica sólo cuando el tamaño de grano inicial,  $d_0$ , es inferior a aproximadamente 30  $\mu\text{m}$ . Dicha tensión viene expresada por:

$$\sigma_{op} = \sigma_{ip} + (3,94 + 0,45 \cdot \log(\epsilon)) d_0^{-0,5}$$

donde  $d_0$  se expresa en mm y  $\sigma_{ip}$  vale:

$$\sigma_{ip} = -15,29 - 1,219 \log(\dot{\epsilon})$$

A partir del inicio de recristalización dinámica ( $\epsilon > \epsilon_p$ ):

$$\sigma = \sigma_p - (\sigma_p - \sigma_{ss}) \left[ 1 - \exp \left( -0,693 \cdot \left( \frac{\epsilon - 7 \cdot 10^{-3} d_0^{0,146} Z^{0,137}}{1,80 \cdot 10^{-6} d_0^{0,24} \cdot \dot{\epsilon}^{0,255} \exp \left( \frac{13,974}{T} \right)} \right)^{1,83} \right) \right]$$

La tensión de estado estable  $\sigma_{ss}$  vale:

$$\sigma_{ss} = \left( \frac{E(T)}{1.168} \right) \operatorname{arcsenh} \left( \left( \frac{1}{813} \right) \left( \frac{\epsilon \cdot \dot{\epsilon}}{D(T)} \right)^{1/5} \right) + \sigma_{oss}$$

donde

$$\sigma_{ss} = 3,5 + 0,751 (d_{rec})^{-1/2}$$

$$\sigma_{oss} = 0 \quad d_{rec} > 30 \mu\text{m}$$

con  $d_{rec}$  en mm aplicable cuando  $d_{rec} < 30 \mu\text{m}$  y hay partículas presentes. Tal tamaño de grano viene dado por la siguiente expresión:

$$\frac{\sigma_{ss}}{\mu(T)} = 0,13 \left( \frac{d_{rec}}{b} \right)^{-0,395}$$

Para calcular  $\sigma_{ss}$  en esta última expresión ha de recurrirse a la ecuación unificada del arcsenh pero tomando  $\sigma_{oss} = 0$ .

En todas las expresiones anteriores,  $Z$  equivale al parámetro de Zener-Hollomon, considerando como energía de activación la de autodifusión,  $E(T)$  es el módulo de Young,  $D(T)$  es el coeficiente de autodifusión,  $\mu(T)$  el módulo de cizalladura y  $b$  el vector de Burgers de la austenita.

En las figuras 15 a 18 se comparan las curvas de fluencia experimentales con las obtenidas con el modelo mecánico desarrollado en este trabajo. Puede apreciarse que, en general, existe un muy buen acuerdo entre el modelo teórico y los ensayos registrados, pudiendo afirmarse que el error entre ambos es inferior al 10 %. Este valor de discrepancia debe tomarse como excelente si se tiene en cuenta que se cubren cinco órdenes de magnitud en velocidad de deformación, 300 °C de temperatura y que no se ha valorado el error experimental. Por otro lado, debe recordarse que entre las hipótesis simplificadoras está el considerar el inicio de la recristalización dinámica en coincidencia con la tensión de pico, cuando se ha demostrado que ocurre antes. Ello puede motivar el desacuerdo que a veces se observa entre las curvas experimentales y las modeladas

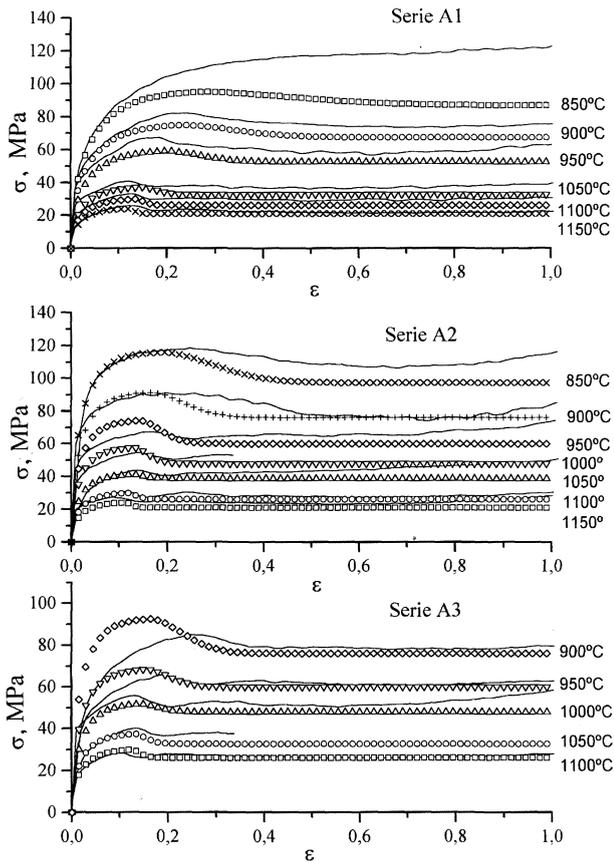


FIG. 15.— Curvas de fluencia experimentales (línea continua) y simuladas (símbolos) para velocidad de formación de  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$  y diversas temperaturas.

FIG. 15.— Experimental (continuous line) and simulated (symbols) flow curves at strain rate of  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$  and diverse temperatures.

especialmente antes de alcanzar la tensión máxima, esto es, en el tramo inicial de la curva de fluencia.

La simulación es especialmente concordante con los ensayos experimentales a velocidades superiores a  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$ . La falta de acuerdo en el rango bajo de velocidades no es sorprendente, pues es a estas velocidades donde aparecen fenómenos que no se han tenido en cuenta en la modelización, como puede ser el *creep* (recuérdese que el tamaño de grano es muy fino en los ensayos de la serie A2 y A3), recristalización dinámica cíclica (sólo se ha modelado el primer ciclo) y la aparición de un segundo pico de tensión superior al primero en algunos casos. Tampoco se tuvieron en cuenta los incrementos de tensión debido a la precipitación dinámica. Este último fenómeno hace que a velocidades de deformación lentas discrepen las curvas de fluencia experimentales y teóricas de 850 °C de la serie A1.

Las curvas de fluencia simuladas muestran, además, cómo quedarían corregidas las curvas experimentales si se introduce la corrección adiabática, especialmente en las curvas de baja temperatura.

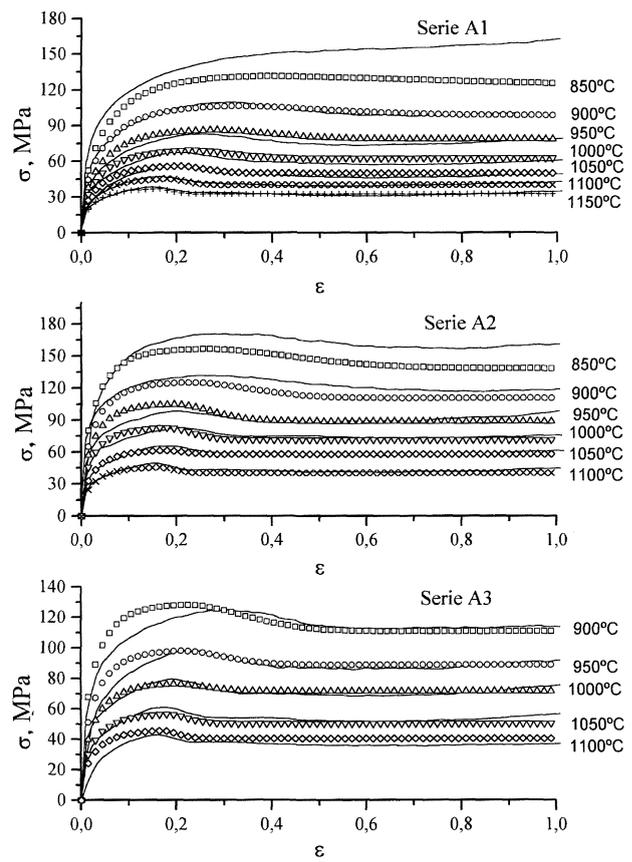


FIG. 16.— Curvas de fluencia experimentales (línea continua) y simuladas (símbolos) para velocidad de deformación de  $10^{-2} \text{ s}^{-1}$  y diversas temperaturas.

FIG. 16.— Experimental (continuous line) and simulated (symbols) flow curves at strain rate of  $10^{-2} \text{ s}^{-1}$  and diverse temperatures.

Puede observarse que en algunos casos el ablandamiento experimental observado se debe más al hecho del aumento de temperatura que no a la aparición de la recristalización dinámica.

Finalmente, cabe comentar que los ajustes son igual de buenos con independencia de la serie de ensayos considerada, quedando por lo tanto demostrada la validez de las ecuaciones desarrolladas en este trabajo, en los cuales se tuvo que incluir el efecto de la microestructura inicial, fundamentalmente a través del tamaño de grano, tanto inicial como recristalizado.

## 6. CONCLUSIONES

Las conclusiones más importantes de esta II parte del estudio son:

- El modelo de Estrin y Mecking y Bergström predice con razonable exactitud las curvas de fluencia en caliente.

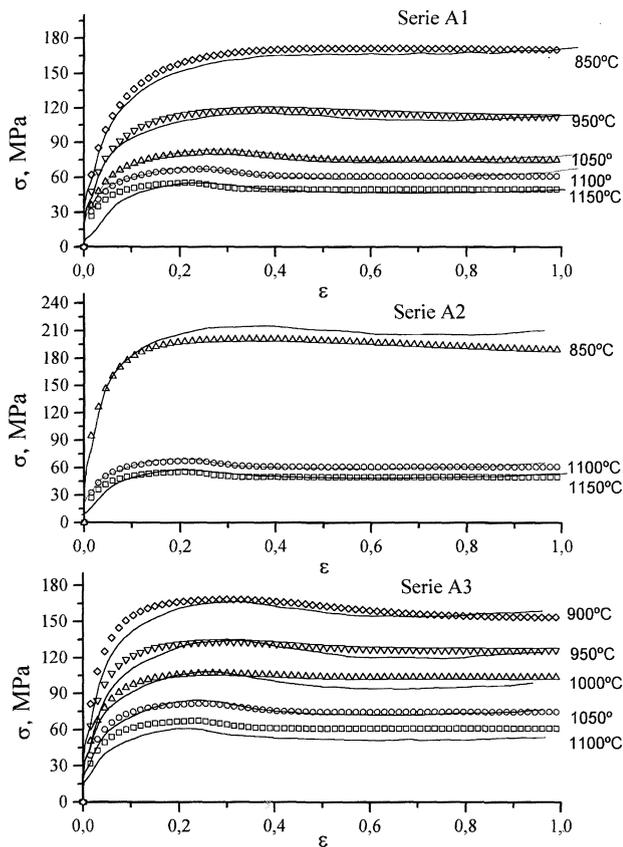


FIG. 17.— Curvas de fluencia experimentales (línea continua) y simuladas (símbolos) para velocidad de deformación de  $10^{-1} s^{-1}$  y diversas temperaturas.

FIG. 17.— *Experimental (continuous line) and simulated (symbols) flow curves at strain rate of  $10^{-1} s^{-1}$  and diverse temperatures.*

- Las ecuaciones cinéticas clásicas también predicen con suficiente rigor las tensiones máximas y de estado estable.
- Para hacer extensibles los modelos anteriores a todas las condiciones de conformado ensayadas, se ha verificado que es necesario incluir una tensión adicional a la tensión global, como efecto del endurecimiento que los límites de grano parecen estar desempeñando. Asimismo, se ha demostrado que se pueden usar ecuaciones con valores reales, en vez de aparentes, para lo cual debe considerarse la energía de autodifusión de la austenita.
- Se ha comprobado que el efecto endurecedor anterior es apreciable a partir de tamaños de grano inferiores a  $30 \mu m$  y que es dependiente de la propia velocidad de deformación.
- Es necesario incluir el efecto de calentamiento adiabático en ensayos de velocidad de deformación relativamente alta ( $\dot{\epsilon} > 3 s^{-1}$ ) y temperatura relativa baja.

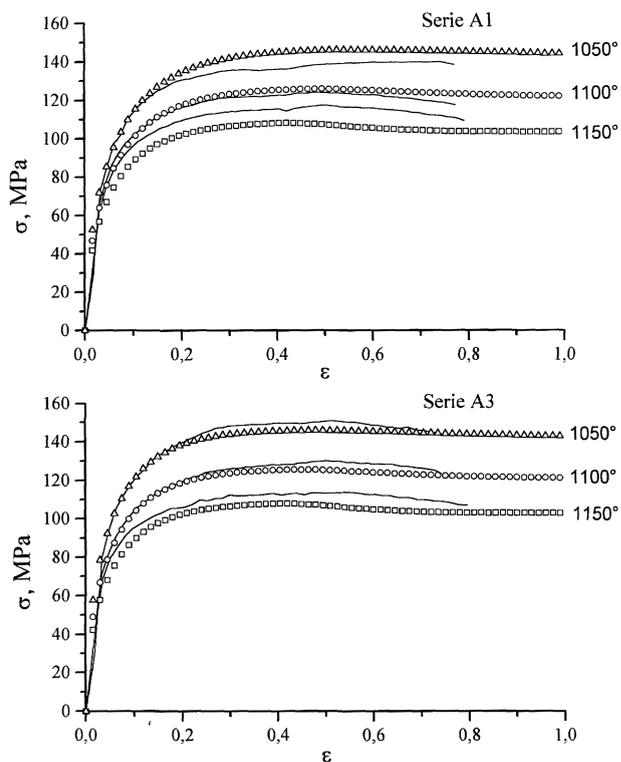


FIG. 18.— Curvas de fluencia experimentales (línea continua) y simuladas (símbolos) para velocidad de deformación de  $10 s^{-1}$  y diversas temperaturas.

FIG. 18.— *Experimental (continuous line) and simulated (symbols) flow curves at strain rate of  $10 s^{-1}$  and diverse temperatures.*

- La recrystalización dinámica en presencia de partículas de segunda fase produjo un tamaño de grano más fino que en el caso de matriz libre de partículas. Tales granos afectaban a los valores de la tensión de fluencia si eran suficientemente finos.
- El tamaño de grano recrystalizado dinámicamente se ajusta a la ecuación universal propuesta por Derby y col.

### Agradecimientos

Uno de los autores (JMC) desea agradecer la concesión de una beca de formación de investigadores por parte del Comissionat de Recerca i Universitats de la Generalitat de Catalunya, así como la ayuda financiera para realizar estancias de investigación en el Dept. of Metallurgical Engineering de la McGill University. Asimismo, se reconoce la ayuda recibida por parte del Dr. D. Baragar y J. McKinnon durante la realización de los ensayos de compresión en el plastómetro en CANMET, Ottawa. Se agradece, también, la colaboración de Eva Vaqué (ETSEIB-UPC) en la preparación metalográfica de las muestras. La financiación de este trabajo

se realizó mediante un proyecto CICYT (MAT 94-0433).

## REFERENCIAS

- (1) LAASRAOUI, A. y JONAS, J.J. *Metall. Trans.*, 22A, 1991: 1.545-1.558.
- (2) BARRETT, C.R., ARDELL, A.J., y SHERBY, O.D. *Trans. Metall. Soc. AIME*, 230, 196: 200-204.
- (3) LUND, R.W. y NIX, W.D. *Metall. Trans.*, 6A, 1975: 1.329-1.333.
- (4) MALU, M. y TIEN, J.K. *Scr. Metall.*, 9, 1975: 1.117-1.120.
- (5) FROST, H.J. y ASHBY, M.F. *Deformation-Mechanism Maps*, Ed. Pergamon Press, Oxford (R.U.) 1982: Caps. 2 y 7.
- (6) JONAS, J.J., SELLARS, C.M. y TEGART, W.J.McG. *Metall. Rev.*, 14, 1969: 1-12.
- (7) MUKHERJEE, A.K., BIRD, J.E. y DORN, J.E. *Trans ASM*, 62, 1969: 155-179.
- (8) WILLIAMS, K.R. y WILSHIRE, B. *Met. Sci. J.*, 7, 1973: 176-179.
- (9) PURUSHOTHAMAN, S. y TIEN, J.K. *Acta Metall.*, 26, 1978: 519-528.
- (10) WU, M.Y. y SHERBY, O.D. *Acta Metall.*, 32, 1984: 1.561-1.572.
- (11) PARK, K., LAVERNIA, E.J. y MOHAMED, F.A. *Acta Metall. Mater.*, 42 (3), 1994: 667-678.
- (12) DIETER, G.E. *Mechanical Metallurgy*, Ed. McGraw-Hill, Nueva York (EE.UU.) 1986: Caps. 6 y 13.
- (13) SELLARS, C.M. *Mater. Sci. Forum*, 113-115, 1993: 29-40.
- (14) PETKOVIC, R.A., LUTON, M.J. y JONAS, J.J. *Met. Sci.*, 1979: 569-572.
- (15) AL OMAR, A. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona (España). 1996.
- (16) AKBEN, M.G., WEISS, I. y JONAS, J.J. *Acta Metall.*, 29, 1981: 111-121.
- (17) AKBEN, M.G., CHANDRA, T., PLASSIARD, P. y JONAS, J.J. *Acta Metall.*, 32 (4), 1984: 591-601.
- (18) DERBY, B. y ASHBY, M.F. *Scr. Metall.*, 21, 1987: 879-884.
- (19) DERBY, B. *Acta Metall.*, 39 (5), 1991: 955-962.
- (20) DERBY, B. *Scr. Metall. Mater.*, 27, 1992: 1.581-1.586.
- (21) VERHOEVEN, J.D. *Fundamentos de metalurgia física*, Ed. Limusa, México, 1987: Cap. 7.
- (22) ESTRIN, Y. y MECKING, H. *Acta Metall.*, 32 (1), 1984: 57-70.
- (23) BERGSTRÖM, Y. *Mater. Sci. Eng.*, 5, 1969-1970: 193-200.
- (24) YOSHIE, A., MORIKAWA, H., ONOE, Y. e ITOH, K. *Trans. ISIJ*, 27, 1987: 425-431.